Geometrie: Inversion am Kreis / Zykloiden 15 Stunden

Lernziele	Lerninhalte	Erläuterungen
Zu einem Inversionskreis k_i (M ; R) und einem Punkt P ($P \neq M$) den Bildpunkt P' konstruieren können und wissen, dass Kreispunkte Fixpunkte der Abbildung sind. Für die Punktkoordinaten die Abbildungsgleichungen im kartesischen Koordinatensystem herleiten können. Konstruktiv und rechnerisch im konkreten Fall begründen können, dass a) das Bild einer Geraden g ($M \notin g$) ein Kreis k mit $M \in k$ ist, b) das Bild eines Kreises k mit $M \in k$ eine Gerade g ist, c) das Bild eines Kreises k mit $M \notin k$ ein Kreis k' ist (die Mittelpunkte der Kreise sind nicht Bilder voneinander).	Inversion am Kreis: Definition, Konstruktion von Bildpunkten und einfache Eigenschaften; Abbildungsgleichung im Koordinatensystem mit kartesischen Koordinaten. Abbildung von Geraden und Kreisen bei Kreisinversion.	Bei der Inversion im Koordinatensystem sollte grundsätzlich der Mittelpunkt des Inversionskreises im Ursprung liegen. Es empfiehlt sich in diesem Zusammenhang auf die Begriffe Pol und Polare (im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) hinzuweisen, insbesondere wenn Probleme der Analytische Geometrie schon bekannt sind. Die konkrete Bestimmung der Gleichung von Polaren (Polarebenen) dient dabei der Festigung der problemorientierten Anwendung des Kathetensatzes des Euklid.
Die Herleitung von Gleichungen für Kegelschnitte mit den zugehörigen Begriffsbildungen verständig nachvollziehen können. Auf der Grundlage von Eigenschaften bzw. Gleichungen Kegelschnittskurven in exemplarischen Fällen konstruktiv und rechnerisch über die Bestimmung von Punktkoordinaten skizzieren können.	Kegelschnitte: Definition mit zugehörigen Begriffen wie numerische Exzentrizität ε, Leitlinie l, lineare Exzentrizität e, Halbachsen a und b. Scheitelpunktsgleichung und Mittelpunktsgleichung (in kartesischen Koordinaten) und Polargleichung von Kegelschnitten. Konstruktion von Kegelschnittskurven in exemplarischen Fällen	Dieser Teilabschnitt kann natürlich entfallen, wenn Kegelschnittsgleichungen aus früherem Unterricht bekannt sind. Der Einsatz von Modellen (z.B. mit Dandelinschen Kugeln) ist bei der Herleitung der Gleichungen hilfreich. Das Thema eignet sich besonders für ein Referat von Schülern. Ein kurze historische Anmerkung zur Namensherkunft (Apollonius von Perga) erscheint sinnvoll.
Mit Hilfe der Abbildungsgleichungen der Kreisinversion Bildgleichungen von Kegelschnittskurven in kartesischen Koordinaten exemplarisch bestimmen können. Für die Punktkoordinaten die Abbildungsgleichungen im Polarkoordinatensystem angeben und damit aus polargleichungen von Kegelschnitten Gleichungen für die Bildkurven bestimmen können.	Abbildung einfacher Figuren durch Kreisinversion in kartesischen Koordinaten Kurven in Polarkoordinatendarstellung, ihre Bilder bei Kreisinversion bzw. ihre Erzeugung durch Kreisinversion Beispiele: Hyperbel (Lemniskate, Strophoide), Parabel (Zissoide, Kardioide)	Zur Darstellung zugehöriger Kurven bietet sich der Einsatz eines geeigneten Plotprogramms, z.B. „Turboplot", an. http://www.turboplot.de
Gleichungen für die Kardioide, Strophoide, Zissoide und Pascalsche Schnecken ohne Kreisinversion aus speziellen geometrischen Problemstellungen herleiten können.	Erzeugung von Zykloiden ohne Kreisinversion Beispiele: Kardioide als Rollkurve, Strophoide, Zissoide, Pascalsche Schnecken (nach Etienne Pascal)	Auch hier bieten sich wieder Schülerreferate, sowie der Einsatz eines Plotprogramms an.
	Empfohlene Ergänzungen: Cassinische Kurven Pappusketten	Bei Cassinischen Kurven sollte man unbedingt auf das historische Problem der Bestimmung der Planetenbahnen (Unterschiedlicher Ansatz durch Kepler und Cassini) eingehen.

Literaturhinweis:
1. Hermann Schmidt: Ausgewählte höhere Kurven; Kesselringsche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden 1949
2. Heinz Bachmann: Vektorgeometrie; Diesterweg/Salle - Verlag 1972

Kursskript von Berthold Große unter:
http://www.herder-oberschule.de/madincea/skripten/InversionKreis.pdf

Im Jahre 1984 hat der ehemalige Fachbereichsleiter Mathematik der Hermann-Hesse-Oberschule in Berlin, Herr StD Berthold Große, ein Skript für seine Fachkonferenz zum obigen Thema erstellt, das er mir seinerzeit zur Verfügung gestellt hat. Auf dieses Skript und die oben angegebene Literatur habe ich mich im wesentlichen bei meinem Unterricht bezogen.

Herr Große hat sein Skript später im Sinne einer Handreichung für Schüler (mit zugehörigen Aufgaben) weiter ausgearbeitet. Dieses Skript ist unter der obigen Adresse aus dem Internet herunter ladbar und man findet dort zusätzliche Literaturhinweise. Auf den Seiten der Hermann-Hesse-Oberschule in Berlin-Kreuzberg ist das Skript unverständlicherweise nicht mehr auffindbar. Darüber hinaus findet man im Internet vielfältiges Material zur Inversion am Kreis.

Ein besonderer Aspekt dieser Unterrichtseinheit, neben den geschichtlichen, ästhetischen und naturwissenschaftlichen Bezügen, ist aus mathematischer Sicht die Verwendung von Polarkoordinaten, womit diese Einheit, nach der Zahlbereichserweiterung zu den komplexen Zahlen, ein vertiefendes Übungsfeld darstellt.
Man sollte nicht darauf verzichten, der Lerngruppe erfahrbar zu machen, wie mühsam die Gleichungsbestimmung von Kurven in kartesischen Koordinaten in einigen Fällen ist, während der Weg über Polarkoordinaten sich oft von verblüffender Einfachheit zeigt.

Selbstverständlich ist es möglich, Inversion am Kreis im Bereich der komplexen Zahlen zu beschreiben. Mir erscheint diese zusätzliche Komponente nicht notwendig. Kulturhistorische Bezüge und Anmerkungen haben in dieser Einheit einen besonderen Stellenwert.

Arbeitsblätter: (Klassenstufe **11**)

(Arne Madincea)

1) Gegeben sind der Inversionskreis $\mathbf{k_i}$ ((0|0) ; R = 5) und der Kreis **k** mit: $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$.
Bestimmen Sie die Gleichung des inversen Bildes von **k** bei Inversion an $\mathbf{k_i}$ in kartesischen Koordinaten. Beschreiben Sie das geometrische Ergebnis (Lagebeziehung) der 3 Graphen zueinander!

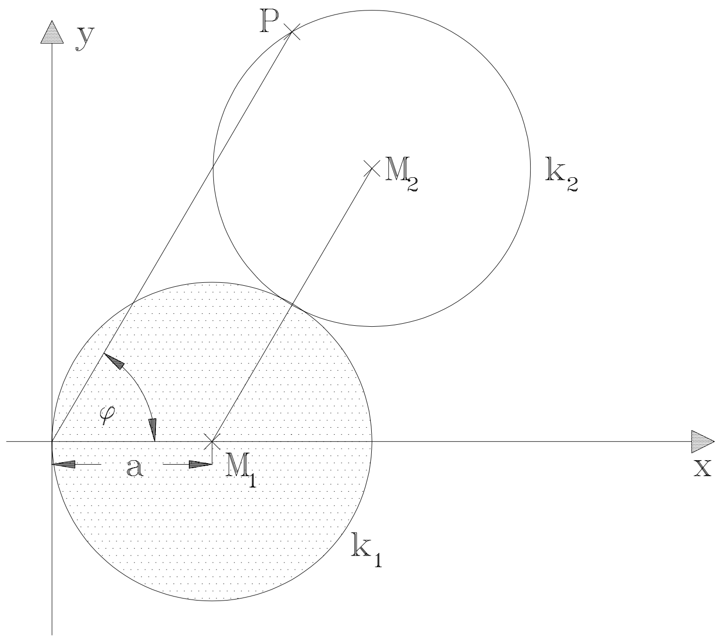
---

2) a) Konstruieren Sie auf Blatt 2 den Bildpunkt **P'** des Punktes **P** (1|1) bei Kreisinversion am Inversionskreis $\mathbf{k_i}$ ((0|0) ; R = 2).

b) **P**, **Q**, **R**, sind Punkte des Graphen der Funktion **f** mit $\mathbf{f}(x) = \sqrt{x}$. - Skizzieren Sie den wahrscheinlichen Verlauf des inversen Bildes von **f** und leiten Sie eine diesen Graphen beschreibende Gleichung in kartesischen Koordinaten her.

---

3) Auf einem ortsfesten Kreis $\mathbf{k_1}$ rollt ein Kreis $\mathbf{k_2}$ ab. Die Radien beider Kreise sind gleich groß (r = **a**).
Auf dem Kreisrand von $\mathbf{k_2}$ ist ein Punkt **P** markiert, der zu Beginn des Abrollvorgangs der Berührpunkt der beiden Kreise im Ursprung ist ($\overline{\varphi} = 180°$).



a) Leiten Sie eine Gleichung der Kurve (Kardioide), auf der sich **P** während des Abrollvorgangs bewegt, in Polarkoordinaten her! - Ergänzen Sie dazu zuvor die nebenstehende Skizze geeignet und begründen Sie notwendige Beziehungen Ihrer Herleitung.

b) Eine Gleichung einer Kardioide kann auch durch Kreisinversion aus einer Kegelschnittsgleichung hergeleitet werden. Geben Sie ein Beispiel einer Kegelschnittsgleichung an, die bei Kreisinversion auf eine Kardioide führen würde.

---

4) Durch die Gleichung: $(x-2)^2 - y^2 = 4$ wird im kartesischen Koordinatensystem eine Hyperbel beschrieben. Der zugehörige Graph nähert sich für betragsmäßig wachsendes x den Graphen der beiden Asymptoten mit den Gleichungen: y = x - 2 und y = 2 - x.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Hyperbel unter Verwendung des asymptotischen Verhaltens und der Schnittpunkte mit der x-Achse (Blatt 2).

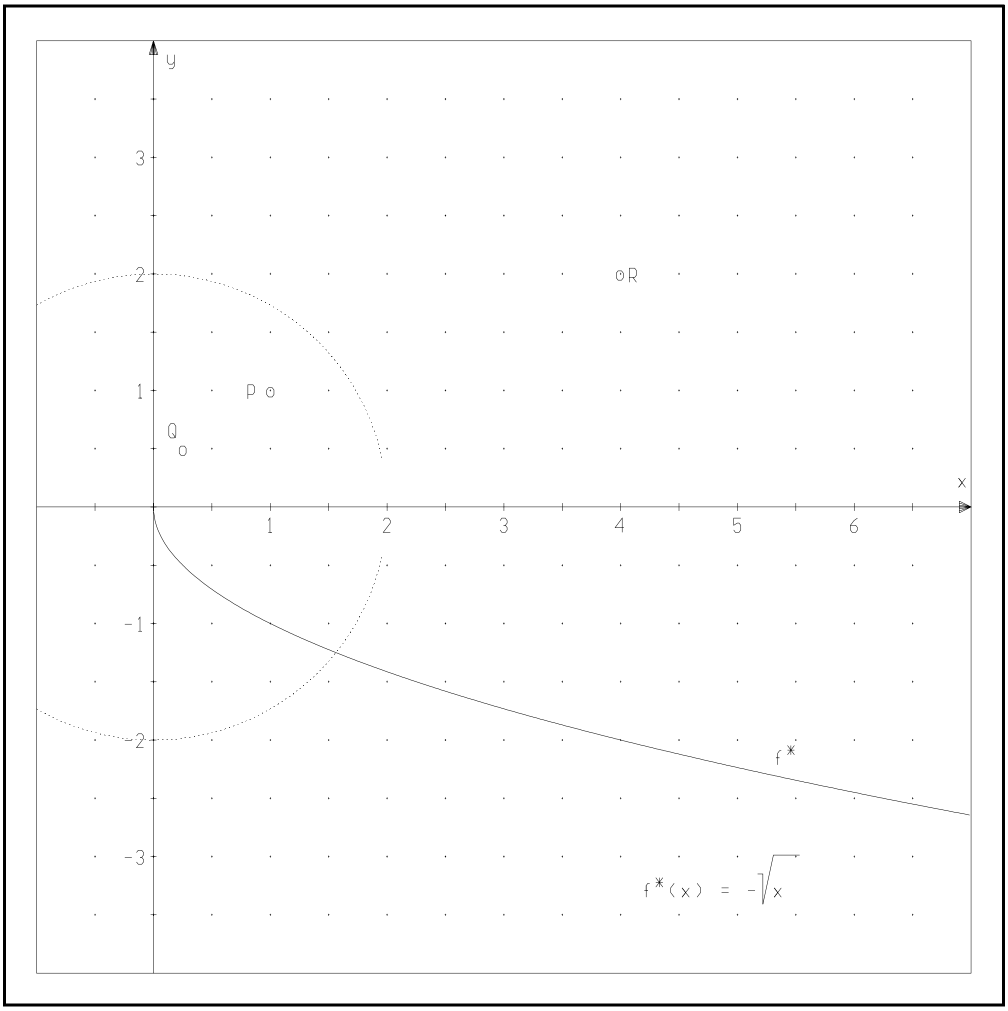
b) Geben Sie die Gleichung der Hyperbel in Polarkoordinaten an.

c) Die Hyperbel soll am Inversionskreis $\mathbf{k_i}$ ((0|0) ; R=4) invertiert werden. Bestätigen Sie, dass die Gleichung der Bildkurve (Strophoide) lautet: $r' = 4 \cdot \frac{\cos(2\cdot\varphi')}{\cos(\varphi')}$

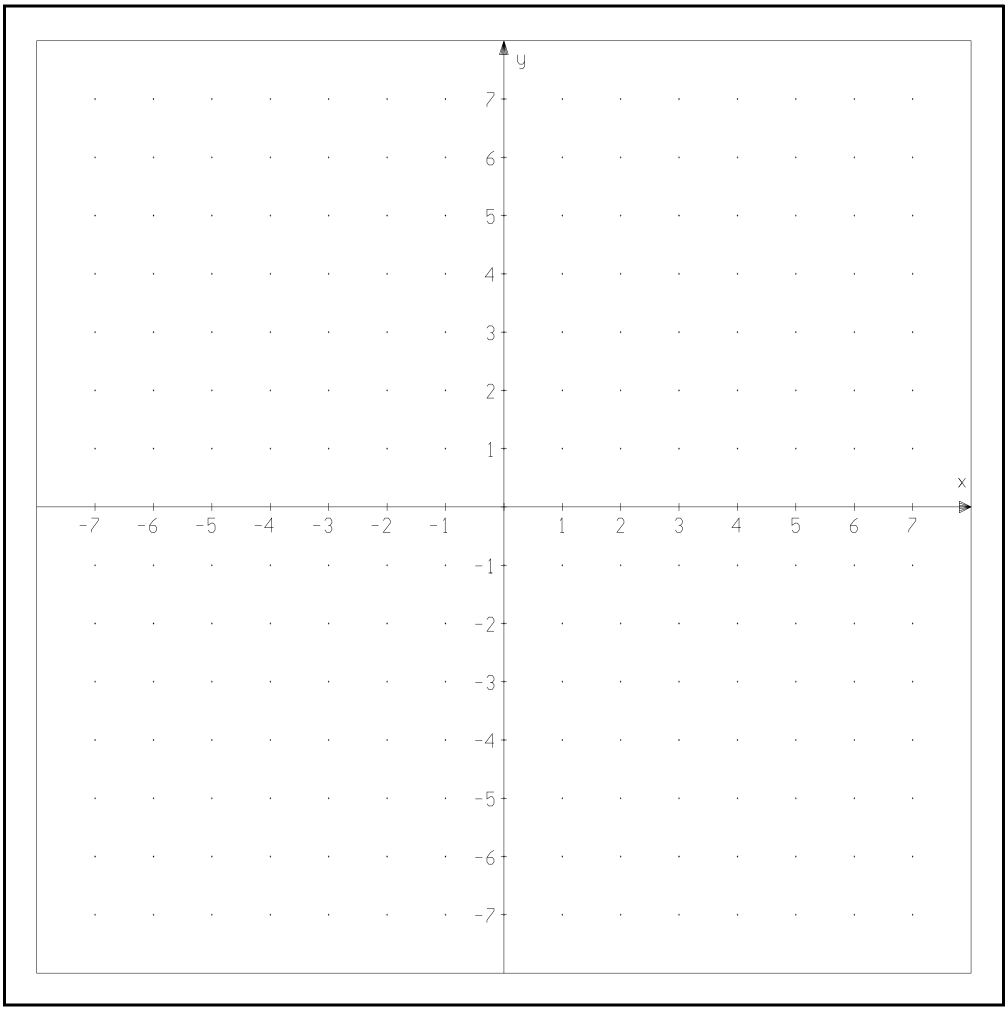
d) Fertigen Sie eine sinnvolle Wertetabelle (Symmetrien beachten!) für die Bildkurve an und skizzieren Sie den Graphen.

e) Was bedeutet das asymptotische Verhalten der Hyperbel für die Bildkurve?

Zu 2)


y
x
3
2
1
-1
-2
-3
1
2
3
4
5
6
R
P
Q
f*
$f^*(x) = -\sqrt{x}$

Zu 4)


y
x
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7

Beurteilung der 2.Klausur ma-P vom 27.05.2004 für:

1) Herleitung der Geradengleichung $x = 5$: /4

Lagebeziehung: /1

2) a) Konstruktion von P'(2 | 2): /3

b) Skizze des Zissoidenastes: /2

Herleitung von $y^2 = \frac{x^3}{4 - x}$: /4

3) a) Ergänzung der Skizze; $r = 2 \cdot a \cdot [\cos(\varphi) + 1]$ /4

b) $y^2 = 2 \cdot p \cdot \left(x + \frac{p}{2}\right)$; Text: /3

4) a) Skizze: /2

b) Hyperbelgleichung in Polarkoordinaten: $r = \frac{4 \cdot \cos(\varphi)}{\cos(2 \cdot \varphi)}$: /4

c) Bestätigung der Gleichung durch Inversion: /2

d) Wertetabelle und Skizze der Strophoide: /5

e) Steigung im Ursprung: 1 (bzw -1): /2

Erreichte Gesamtleistung (Rohpunkte): /36

dies entspricht ungefähr % der erreichbaren Leistung (von **36 Rohpunkten**)

Äußere Form und Darstellung:

Urteil: **(Punkte)**