

Analyse von Aufgaben (und Aufgabensystemen) als Element der Unterrichtsvorbereitung¹

1. Ziele einer Aufgabenanalyse

Die Aufgabenanalyse ist als effektives Mittel der alltäglichen Unterrichtsvorbereitung nach hinreichender Übung ohne allzu großen Aufwand anwendbar. Ihr Hauptzweck besteht darin, die jeweiligen inhaltlichen und teilweise auch lernpsychologischen Voraussetzungen aufzudecken, die erfüllt sein müssen, wenn die Schüler mit einer Aufgabe sinnvoll umgehen sollen.

2. Anmerkungen zu Aufgaben im Mathematikunterricht

Im Mathematikunterricht kann eine "Aufgabe" z.B. eine elementare Rechenaufgabe, aber auch ein Beweis sein. Auf eine in der Literatur auch vorhandene allgemeinere Auffassung des Begriffs Aufgabe wird hier nicht eingegangen.

Im Mathematikunterricht kommt der Aufgabe eine zentrale Rolle zu. Aufgaben können dienen

- S als Mittel zur Einführung in neue Themenbereiche,
- S zur Übung und Festigung algorithmischer und zeichnerischer Fähigkeiten,
- S als Mittel der Differenzierung,
- S als Mittel der Leistungskontrolle usw.

Auch empirische Untersuchungen haben gezeigt, dass viele Mathematiklehrer in den Aufgaben das Mittel sehen, die zahlreichen Faktoren ihrer Unterrichtsvorbereitung in den Griff zu bekommen. Die dabei bestehenden Schwierigkeiten, insbesondere für weniger erfahrene Lehrer, sollen durch Aufgabenanalyse verringert werden.

3. Begriff der Aufgabenanalyse

In der Aufgabenanalyse versucht der Lehrer, aus der Sicht des Schülers die betreffende Aufgabe hinsichtlich möglicher Lösungswege und der Schwierigkeiten bei ihrer Erfassung und Lösung einzuschätzen (vgl. Gedankenexperiment im Sinne Freudenthals²). Dabei bezieht sich die Aufgabenanalyse nicht auf einzelne Schüler, sondern auf den Schüler im Durchschnitt der konkreten Lerngruppe. Es geht darum, das Wissen und die Fähigkeiten, die eine Lösung der Aufgabe ermöglichen, herauszufinden und deren Verfügbarkeit einzuschätzen. Ausgehend von einer solchen Analyse kann der Lehrer die Planung von Lehrmaterialien und Lehrtechniken angehen.

Unterrichtsvorbereitung besteht jedoch nicht nur aus Aufgabenanalyse, insbesondere sind die Handlungen des Lehrers zu planen.

4. Vorgehen zur Aufgabenanalyse

4.1 Allgemeine Kennzeichnung

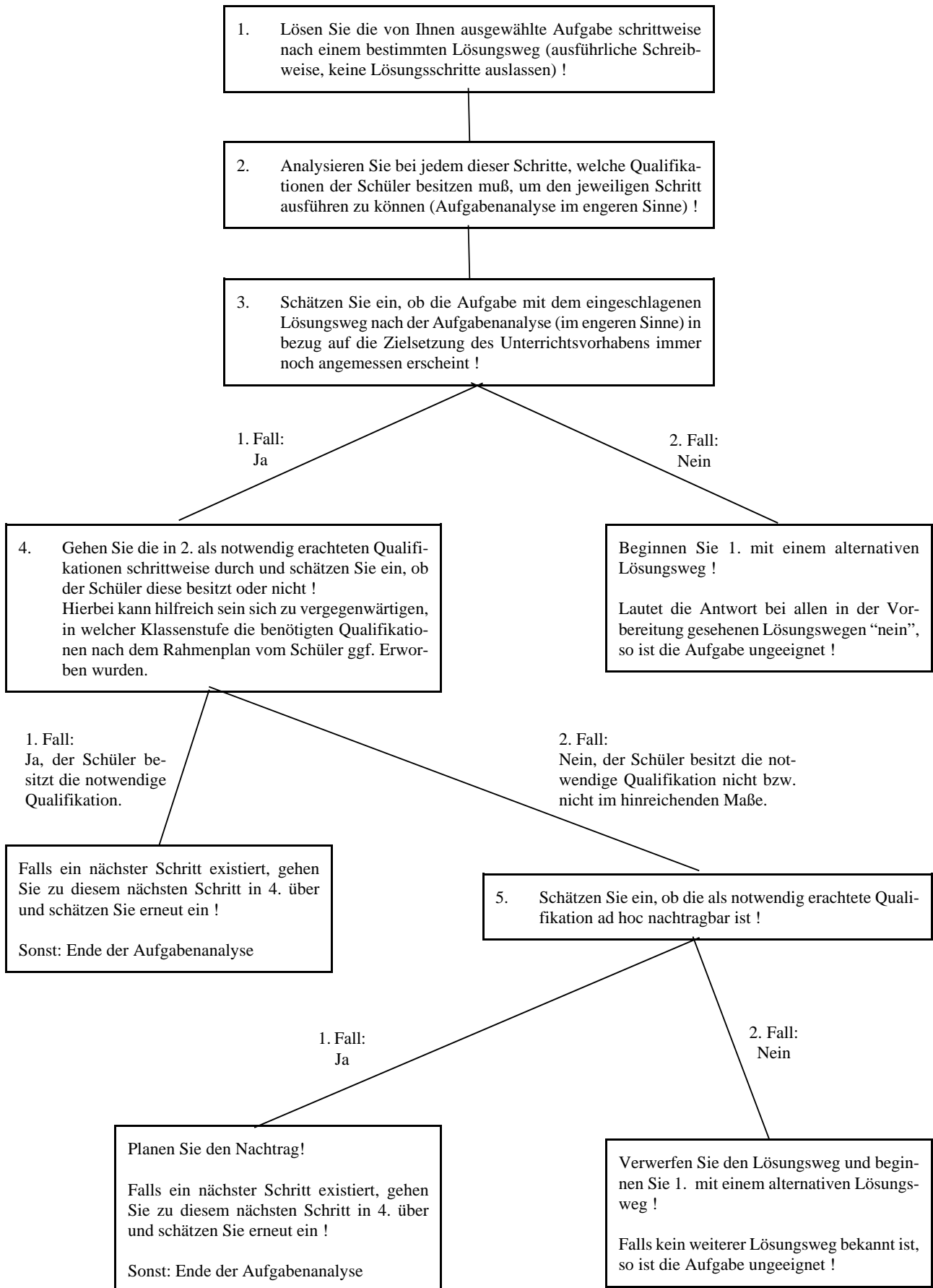
Ausgangspunkt der Aufgabenanalyse ist ein bestimmter sequentieller Verlauf der Aufgabenlösung. Die Sequenz der Einzelschritte (Folge von Operationen und Verhaltensweisen) gibt nun die Grundlage dafür ab, nach Konzepten und Begriffen zu fragen, die als prinzipielle Voraussetzungen für die Lösung der Aufgabe bzw. für die Durchführung einzelner Schritte und Operationen vom Lehrer angenommen werden. Die Beziehung zwischen sequentiellem Verlauf und ihn organisierenden Konzepten ist nicht eindeutig und starr, sondern selbst Gegenstand der Analyse.

¹ Auszüge aus einem Arbeitspapier für Fachseminare Mathematik, erstellt von StD Jürgen Homeister

² Hans Freudenthal: Mathematik als pädagogische Aufgabe (Klett Verlag)

4.2 Skizze eines Ablaufrasters zur Aufgabenanalyse

Kernfrage der Aufgabenanalyse ist: Welche Fähigkeiten und welches Wissen ermöglichen dem Schüler, die Aufgabe zu lösen?



Bemerkung 1

Eine erfolgreiche Aufgabenbearbeitung durch den Schüler setzt voraus, dass bereits bei Lösungsbeginn eine mehr oder minder globale Idee von der Struktur der Aufgabe als ganzer vorhanden ist.

Bemerkung 2

Es kann natürlich sein, dass die Schüler eine Aufgabe bekommen, bei der sie wegen einer bestimmten Qualifikationslücke scheitern, deren Ausfüllung aber das Ziel des Unterrichtsvorhabens ist und die im nachfolgenden Unterricht gerade thematisiert werden soll. In solch einem Fall sollte nicht nach 5. des Ablaufrasters verfahren werden. Vielmehr sollte dieses Scheitern fixiert, die fehlende Qualifikation vermittelt und anschließend die abgebrochene Aufgabe beendet werden (Aufgaben als Mittel zur Einführung in neue Themenbereiche).

Bemerkung 3

Sind die Qualifikationslücken zu zahlreich oder ist der Zeitaufwand zu ihrer Behebung zu groß, so ist der vorgesehene Lösungsweg ungeeignet (es besteht die Gefahr, dass der Schüler die Zielsetzung der Aufgabe aus dem Auge verliert).

Bemerkung 4

(trivial) Erscheinen alle bekannten Lösungswege nicht beschreibbar, so ist unter Beachtung von Bemerkung 1 die Aufgabe zu verwerfen.

Bemerkung 5

Selbst wenn ein Lösungsweg als völlig unproblematisch erscheint, sind auch alternative Lösungswege zu bedenken, damit auf eventuelle Schülerbeiträge angemessen reagiert werden kann (Erhöhung der Lehrerflexibilität).

Bemerkung 6

Auch verworfene Aufgaben bzw. Lösungswege können oft an anderer Stelle (im späteren Unterricht oder in anderen Lerngruppen) erfolgreich eingesetzt werden.

Bemerkung 7

Der Lehrer kann seine Fähigkeit, Aufgaben aus der Sicht des Schülers einzuschätzen (vgl. 3.), dadurch verbessern, dass er

S Schüler in Stillarbeitsphasen beobachtet,

S sich Lösungswege von Schülern erläutern lässt und

S Aufgabenlösungen von Schülern in Hausaufgaben, Hausaufgabenkontrollen, kurzen schriftlichen Lern-erfolgskontrollen, Klassenarbeiten, Klausuren usw. sorgfältig analysiert (Fehleranalyse).

Der Lehrer ist auf diese Erfahrungswerte immer wieder angewiesen, weil Lerngruppen in der Regel unterschiedliche Voraussetzungen mitbringen und sich auch anders verhalten.

Bemerkung 8

Die sequentielle Darstellung in der Aufgabenanalyse gestattet es im allgemeinen nicht, die Bedeutung der betreffenden Einzelqualifikationen für die Schüler und damit deren Gewichtung im Unterricht einzuschätzen. Die Lösung dieses Problems wird durch eine hierarchisierte Darstellung der Aufgabenanalyse gegeben. Der Lehrende sollte deshalb in der Lage sein, Aufgabenanalysen in hierarchisch-sequentieller Form anzufertigen.

Bemerkung 9

Bei wachsender Erfahrung und hinreichender Übung wird die zutreffende Einschätzung einer Aufgabe simultan bereits während ihrer Lösung durch den Lehrer erreicht.

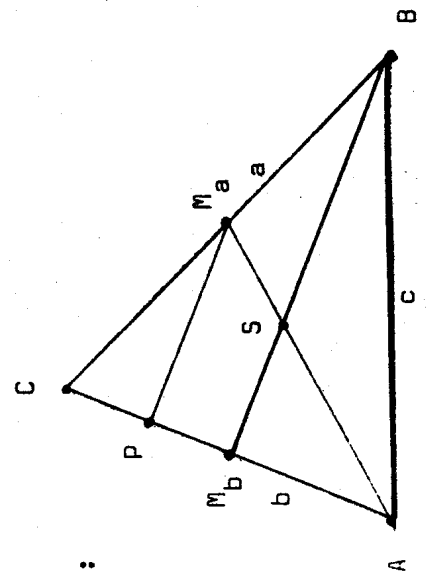
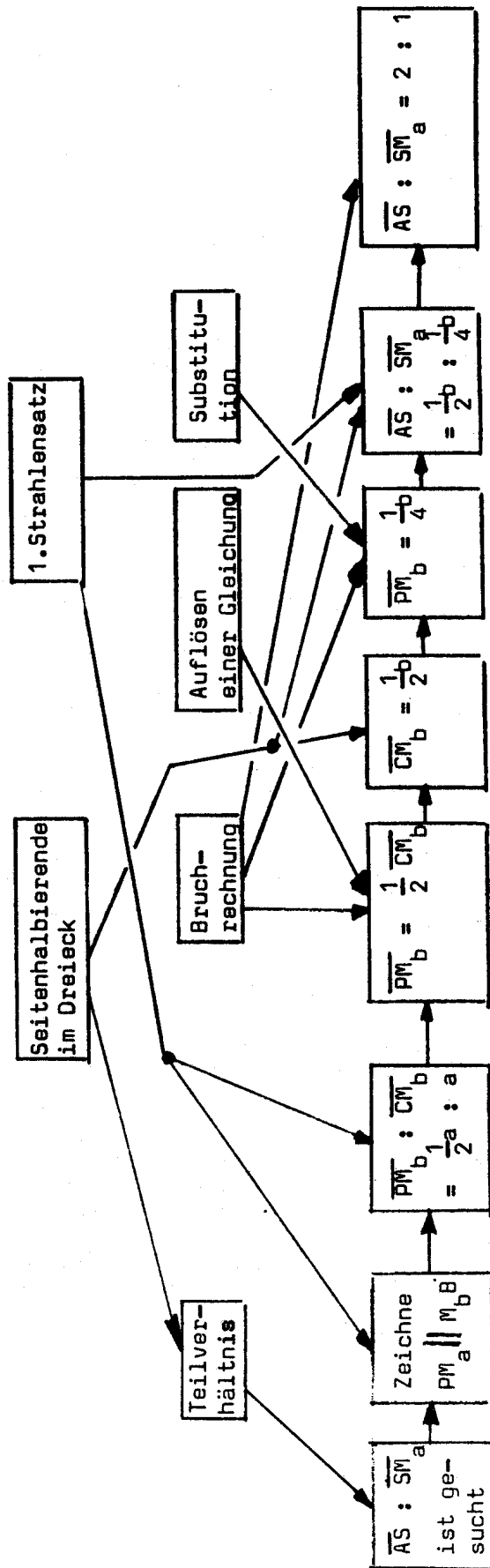
Literatur:

Bromme, Seeger: Unterrichtsplanung als Handlungsplanung, Scriptor Verlag, Königstein/Ts 1979

Aufgabe: Man zeige (unter Verwendung von Strahlensätzen), daß der Schnittpunkt von zwei Seitenhalbierenden eines Dreiecks jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2 : 1 teilt!

Die Aufgabe wird in Klasse 9 als Anwendungsaufgabe nach der Behandlung der Strahlensätze gestellt.

Hierarchisch-sequentielle Struktur der Aufgabe



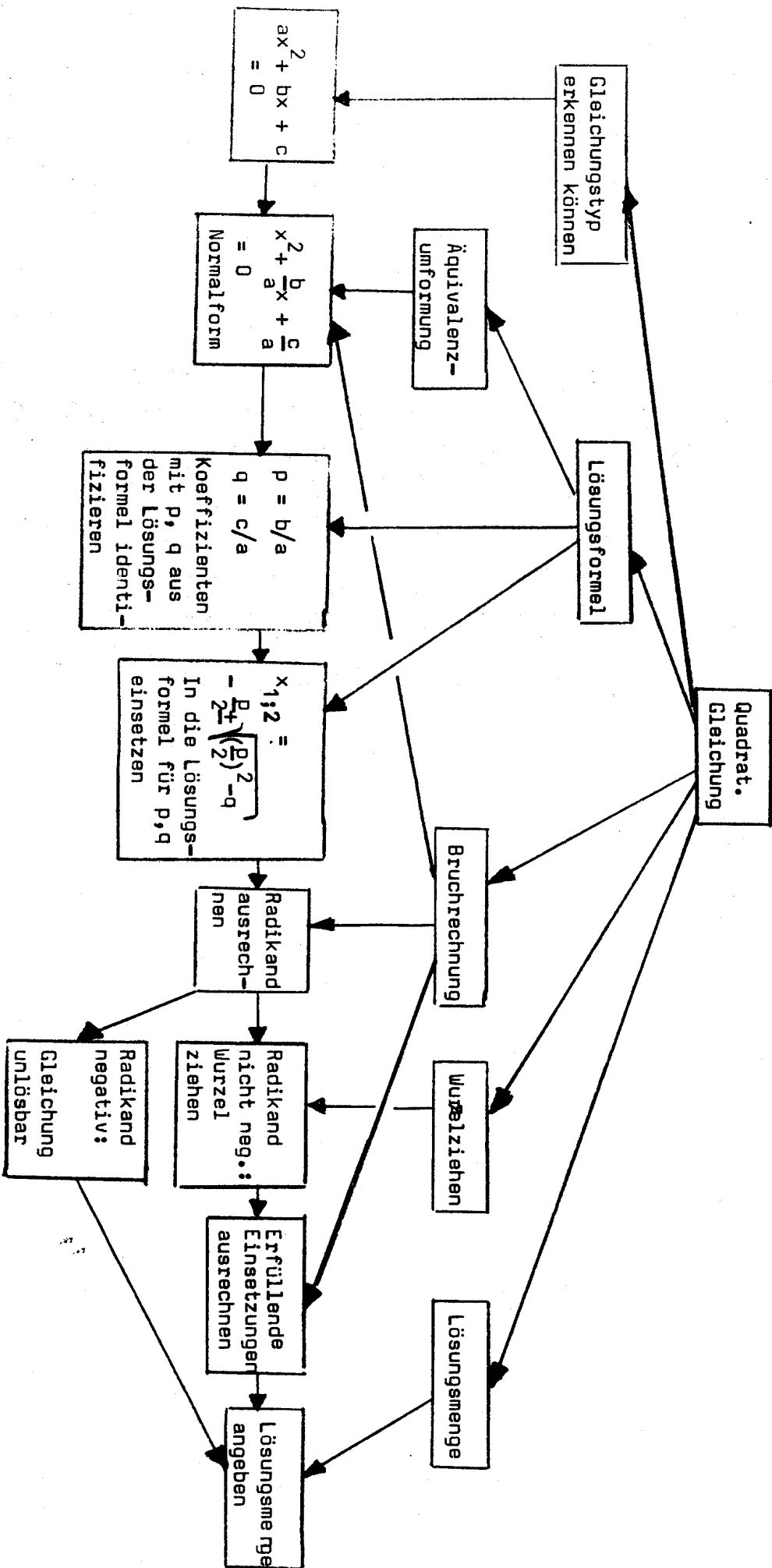
Skizze:

Bemerkung: $\overline{BS} : \overline{SM}_b$ Analogie Überlegung für

Aufgabe: Lösung einer quadratischen Gleichung mit der Lösungsformel.

Situation: Einführungsphase-Fundamentalbereich oder Grundkurs

Hierarchisch-sequentielle Struktur der Aufgabe



Beispiel einer Aufgabenanalyse

Aufgabe: Bestimme die Lösungsmenge bzgl. $G = \mathbb{Q}$ von

$$\frac{2x+3}{x} - \frac{5x-3}{x^2} + \frac{2x^2-x-6}{x^3} = 2 \quad !$$

Qualifikationen:

Es ist erforderlich, daß die Schüle

- den Begriff der Lösungsmenge einer Gleichung kennen und wissen, daß man "nach x auflösen muß".
- den Hauptnenner der auf der linken Seite der Gleichung auftretenden Bruchterme bestimmen können.
- die auf der linken Seite der Gleichung auftretenden Bruchterme so erweitern können, daß in allen Nennern der Hauptnenner erscheint.
- das Distributivgesetz anwenden können.
- Bruchterme mit gleichen Nennern addieren können.
- Klammern auflösen können.
- Summenterme durch "Zusammenfassen" vereinfachen können.
- beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren können.
- Bruchterme kürzen können.
- auf beiden Seiten einer Gleichung denselben Term subtrahieren können.
- auf beiden Seiten einer Gleichung dieselbe Zahl addieren können.

Hauptnenner: x^3

$$\frac{(2x+3)x^2}{x^3} - \frac{(5x-3)x}{x^3} + \frac{2x^2-x-6}{x^3} = 2$$

$$\frac{2x^3+3x^2}{x^3} - \frac{5x^2-3x}{x^3} + \frac{2x^2-x-6}{x^3} = 2$$

$$\frac{(2x^3+3x^2) - (5x^2-3x) + (2x^2-x-6)}{x^3} = 2$$

$$\frac{2x^3+3x^2-5x^2+3x+2x^2-x-6}{x^3} = 2$$

$$\frac{2x^3+2x-6}{x^3} = 2$$

$$\frac{(2x^3+2x-6)x^3}{x^3} = 2x^3$$

$$2x^3+2x-6 = 2x^3$$

$$2x-6 = 0$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$L = \mathbb{D} \cap \{3\}$$

$$3^3 = 27 \neq 0$$

$$L = \{3\}$$

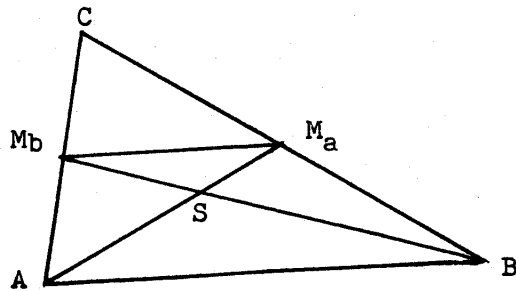
- beide Seiten einer Gleichung durch dieselbe (von Null verschiedene) Zahl dividieren können.
- wissen, daß alle bisherigen Umformungen bzgl. des Definitionsbereichs der Ausgangsgleichung Äquivalenzumformungen sind.
- wissen, daß die Lösungsmenge der gegebenen Bruchgleichung die Schnittmenge aus dem Definitionsbereich und der Lösungsmenge der durch die Umformungen erhaltenen Gleichung ist.
- alle Lösungen der erhaltenen Gleichung in den Hauptnenner einsetzen und feststellen können, ob der Hauptnenner in 0 übergeht.
- wissen, daß Lösungen der durch Umformung erhaltenen Gleichung nicht zur Lösungsmenge der gegebenen Bruchgleichung gehören, wenn man bei Einsetzung in den Hauptnenner Null erhält.
- die Lösungsmenge der gegebenen Bruchgleichung angeben können.

Beispiel einer Aufgabenanalyse

Aufgabe: Man bestimme (ohne Messung), in welchem Verhältnis der Schnittpunkt S zweier Seitenhalbierenden im Dreieck diese teilt (Anwendungsaufgabe zu den Strahlensätzen am Ende des zugehörigen Lernabschnitts)

Nebenbedingung: Schüler schlagen intuitiv die Verbindung zweier Seitenmitten M_a und M_b als Hilfslinie vor und setzen nach Augenschein diese (selbstverständlich) als parallel zu \overline{AB} voraus.

Daher Hilfsimpuls: Woher wißt ihr, daß stets $M_a M_b \parallel \overline{AB}$?



$$\overline{SA} : \overline{SM_a} = ?$$

$$\overline{SB} : \overline{SM_b} = ?$$

$$\overline{CA} : \overline{CM_b} = 2 : 1$$

$$\overline{CB} : \overline{CM_a} = 2 : 1$$

$$\overline{CA} : \overline{CM_b} = \overline{CB} : \overline{CM_a}$$

$$M_b M_a \parallel \overline{AB}$$

$$\overline{SA} : \overline{SM_a} = \overline{AB} : \overline{M_b M_a} = ?$$

$$\overline{AB} : \overline{M_b M_a} = \overline{CA} : \overline{CM_b} = 2 : 1$$

$$\overline{SA} : \overline{SM_a} = 2 : 1$$

$$\overline{SB} : \overline{SM_b} = \overline{SA} : \overline{SM_a}$$

Allgemeine Strategie:

Gesuchtes und nach Konstruktion Gegebenes feststellen und in Fachsprache formulieren

Begriffsverständnis:

Teilverhältnis
Seitenhalbierende

Schlußweise:

Transitivität der Gleichheit (*)

Fähigkeit zur Anwendung aller

Strahlensätze:

Erkennen verschiedener Strahlensatzfiguren in einer Zeichnung

Umkehrung des 1. Strahlensatzes

als Hilfsmittel zum Parallelitätsnachweis

2. Strahlensatz (für Lage des Scheitels zwischen den Parallelen)

(*)

1. Strahlensatz (für Lage des Scheitels zwischen den Parallelen)