Hermann-Hesse-Oberschule (Gymnasium)
Fachbereich Mathematik

Kurs ma - 1

$\int$ i n

---

máthēma

= das Gelernte, die Kenntnis

mathematikói (μαϑηματικοί), d. h. die durch Lernen Einsicht erlangt Habenden

mathēmatikos = lernbegierig

Wie das Frontblatt schon sagt: In der Mathematik müssen Vokabeln [1] gelernt werden. Wer nicht weiß, was bestimmte Bezeichnungen wie zum Beispiel $f'(2)$ bedeuten, kann keinen Lernfortschritt erzielen. Einer Erklärung kann das Gehirn im Zusammenhang nicht folgen, wenn es an bestimmten Stellen "STOP" macht, weil ein Begriff, ein Zusammenhang nicht verstanden wird, der als bekannt vorausgesetzt wird. Es wird hier die Behauptung vertreten, dass es **grundsätzlich keine Menschen gibt, die Mathematik einfach nicht können**. Es gibt nur Menschen, die erhebliche Defizite [2] im Vokabelwissen haben und solche, die diese Defizite nicht oder nur in geringem Ausmaß haben. Sie haben schließlich die 12. Klassenstufe erreicht, woraus geschlossen werden darf, dass es Ihnen nicht an logischem Verstand fehlen kann. Im Übrigen hat schon Goethe festgestellt, dass die Intelligenz "die am gerechtesten verteilte Sache der Welt ist, weil jeder Mensch glaubt, genug davon zu haben".

Auf den nächsten Seiten sollen einige Grundlagen insbesondere aus der Klassenstufe 11 zusammengestellt werden, auf die nicht verzichtet werden kann. Es ist sinnlos, die Inhalte des Kurses ma-1 verstehen zu wollen, wenn man nicht weiß, was anschaulich hinter dem Zeichen $f'(2)$ steckt.
Ebenso wird vorausgesetzt, dass die Kursteilnehmer verständig mit Parabeln und einfachen ganzrationalen Funktionen dritten Grades umgehen können.
Es kann nicht erwartet werden, dass an jeder Stelle Inhalte aus Klasse 7/8 (Prozentrechnung), aus Klasse 9 (p-q-Formel), Klasse 10 (Potenzrechnung, trigonometrische Funktionen) im Kurs wiederholt werden. In Klasse 11 fand bereits in groben Zügen eine Wiederholung wesentlicher Inhalte statt, die nun gebraucht werden. Wenn hier Mängel vorhanden sein sollten, muss man an den betreffenden Stellen auch einmal "außerschulische Hilfe" in Anspruch nehmen.
Das vorliegende Skript soll ein Schulbuch ersetzen. Es spricht alle Inhalte, die der Rahmenplan fordert, an. Obwohl dieses bereits die 4. verbesserte Ausgabe ist, wird es -wie jedes Buch- immer noch nicht frei von Druckfehlern sein. **Es wird also erstens um Verständnis gebeten, dass die Verfasser nicht perfekt sind und zweitens um Rückmeldung gebeten, wo Druckfehler und auch methodisch-didaktische Ungeschicklichkeiten auffallen.**
Die Mathematik, die hier angeboten wird, ist jedenfalls "richtig". (Das soll heißen, dass Sie keine inhaltlichen Fehler finden werden.)
Ich möchte mich an dieser Stelle bei den Herren Baumann, Dietsch, Dr. Röding für die Unterstützung bei der Erstellung dieses Skripts bedanken. In diesen Dank eingeschlossen ist Herr Madincea (ein Blick in http://home.t-online.de/home/Arne.Madincea lohnt sich!!), ohne dessen unendliche Geduld die folgenden Zeilen, Graphiken, ... nie in einen Computer gekommen wären.

B. Große.
Kreuzberg, Winter 2002

[1] vocabulum, lat. = Benennung, Bezeichnung

[2] deficere, lat. = abnehmen, fehlen

Grundkurse

Kurs 1: ma-1

Integralrechnung
(25 Stunden)

Hinweise zum Lernabschnitt:

- Es sind mehrere Zugänge zum bestimmten Integral möglich. Auch bei einem anderen als dem hier dargestellten Weg muß deutlich werden, daß das bestimmte Integral als Grenzwert von Folgen von Ober- bzw. Untersummen berechenbar ist.
- Bei den hier auftretenden Flächen wird die Existenz des Flächeninhalts jeweils vorausgesetzt; deshalb steht die Berechnung von Flächeninhalten im Vordergrund und keinesfalls das Problem, den Flächeninhalt erst zu definieren.
- Der Gedanke der Approximation mit Hilfe von Rechtecken ist als wesentliche Idee herauszustellen.
- Der Begriff der Stetigkeit soll nicht thematisiert werden.

Lernziele	Lerninhalte
	Flächeninhalte für Flächen unter Funktionsgraphen.
Für monotone Funktionen bei vorgegebener Intervallunterteilung Ober- und Untersummen angeben und graphisch veranschaulichen können.	Approximation von Flächen mit Hilfe von Rechtecken; Ober- und Untersummen.
Flächeninhalte unter Graphen einfacher monotoner Funktionen berechnen können.	Einschachtelung von Flächeninhalten durch Ober- und Untersummen für auf dem betrachteten Intervall monotone Funktionen und äquidistante Intervalleinteilungen; Flächeninhalt als innere Zahl einer Intervallschachtelung.
Eine Definition des bestimmten Integrals kennen. Bestimmte Integrale graphisch deuten können.	Das bestimmte Integral. Unterschied zwischen bestimmtem Integral und Flächeninhalt. Rechenregeln für bestimmte Integrale (Linearität, Additivität).
Den Begriff der Stammfunktion kennen und überprüfen können, ob eine vorgegebene Funktion Stammfunktion einer anderen ist.	Stammfunktion.

Lernziele	Lerninhalte
Wissen und erläutern können, daß Flächeninhaltsfunktionen zu (stetigen) Funktionen Stammfunktionen der Ausgangsfunktion sind.	Flächeninhaltsfunktionen zu (stetigen) Funktionen als Stammfunktionen der Ausgangsfunktion (Hauptsatz).
Die Formel $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ $(F'(x) = f(x))$ kennen und anwenden können.	Berechnung von bestimmten Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen.
Flächeninhalte berechnen können.	Flächeninhalte, auch für Flächen zwischen Funktionsgraphen mit mehr als zwei Schnittpunkten.

Trigonometrische Funktionen
(20 Stunden)

Hinweise zum Lernabschnitt

- Die Ableitungsübungen zur Ketten- und Produktregel sollen mit ausgewählten Fragestellungen aus dem Bereich der Kurvendiskussion verbunden werden.
- Außermathematische Anwendungsmöglichkeiten der trigonometrischen Funktionen sollen bei der Aufgabenwahl bedacht werden.

Lernziele	Lerninhalte
Wissen, daß $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$ gilt.	Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion. Hinweis: Benötigte Additionstheoreme können der Formelsammlung entnommen werden. Die Kenntnis der Kettenregel ermöglicht es, die Ableitung des Kosinus aus der des Sinus zu gewinnen.
Die Kettenregel kennen und anwenden können.	Kettenregel; Ableitungsübungen, z.B. $x \to 2 \cdot \sin(4x - 1)$, $x \to 0{,}5 \cdot \cos(x^2)$
Flächeninhalte für einfache trigonometrische Funktionen als bestimmte Integrale berechnen können.	Integration von sin und cos. Bestimmungen von Flächeninhalten für Funktionen wie $x \to 5 \cdot \sin(x + \frac{\pi}{4})$, $x \to 2x + \cos(2x)$ Hinweis: Hier ist nicht an Integration durch Substitution gedacht; die Kettenregel führt unmittelbar zum Auffinden einer Stammfunktion.
Die Produktregel kennen und anwenden können.	Produktregel; Ableitungsübungen, z.B. $x \to x \cdot \cos x$, $x \to (\sin x^2)$. Anwendungen.

Bestimmung des Scheitels einer Parabel

Eine Parabel kann nach oben oder nach unten geöffnet sein. Man erkennt dies unmittelbar aus dem Faktor (**Koeffizienten**), der vor x^2 steht: Ist dieser positiv, ist die Parabel nach oben geöffnet.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x - 6$ (hier liegt also eine nach oben geöffnete Parabel vor, da der Koeffizient $\frac{1}{3}$ positiv ist)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^2 - x - 6 \\ &= \frac{1}{3}(x^2 - 3x) - 6 \\ &= \frac{1}{3}\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) - 6 \\ &= \frac{1}{3}\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right) - 6 \\ &= \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4} - 6 \\ &= \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} - 6 \\ &= \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 6{,}75 \end{aligned}$$

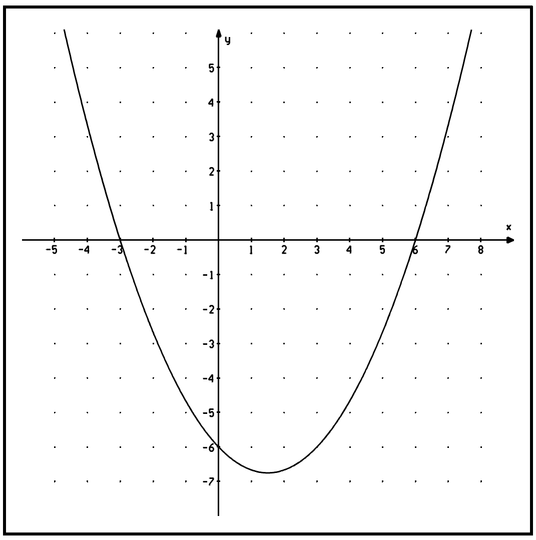
(1) es wird "teilweise" $\frac{1}{3}$ ausgeklammert

(2) es wird $\frac{9}{4}$ addiert und subtrahiert, um die binomische Formel anwenden zu können

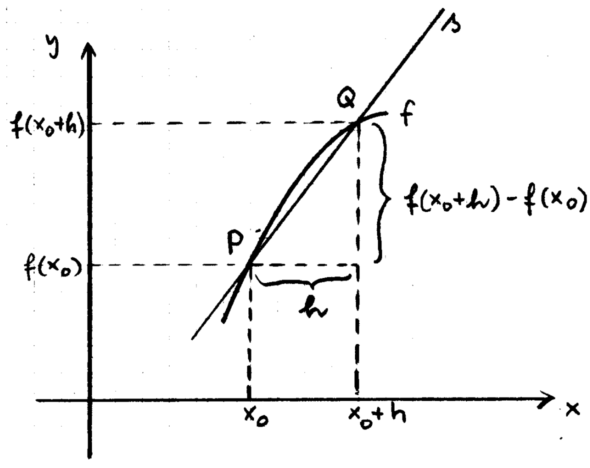
(3) es wird wieder ausmultipliziert und dann

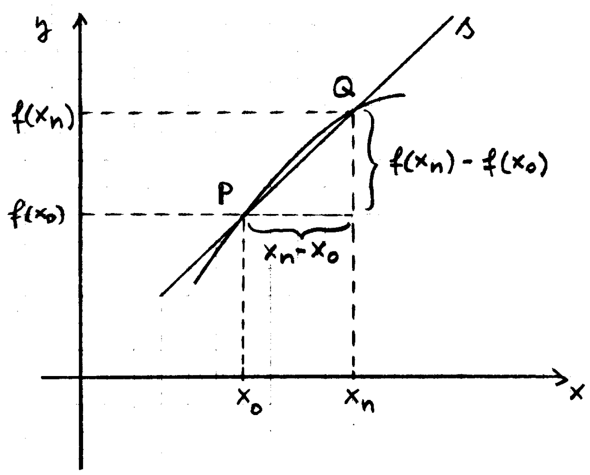
(4) zusammengefasst

Es liegt also eine Parabel mit dem Scheitel S (1,5 / - 6,75) vor.



Begründung:
Die Parabel ist nach oben geöffnet und **hat** also **im Scheitel ihren tiefsten Punkt**. Das ist der Punkt, der den kleinsten Funktionswert hat. Den kleinsten Funktionswert erhält man aber gerade für denjenigen x-Wert, für den $\mathbf{(x - 1{,}5)^2}$ den Wert Null annimmt.
Für alle anderen x-Werte ist $\mathbf{(x - 1{,}5)^2}$ positiv, der Funktionswert wird dann also größer als - 6,75. Ist die Parabel nach unten geöffnet, bestimmt man nach derselben Methode denjenigen Punkt, der den größten Funktionswert hat.





Will man die Steigung in einem Punkt $P(x_o/f(x_o))$ eines Graphen bestimmen, so erhält man einen Näherungswert, wenn man die Steigung $\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$ der Sekanten s berechnet. (Q darf natürlich nicht zu weit von P entfernt sein.)

Die Tangentensteigung an der Stelle x_o erhält man als Grenzwert, wenn h (**$h \neq 0$**) gegen Null konvergiert:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = f'(x_o)$$

Üblich ist auch die folgende Schreibweise:
Man bestimmt die Steigung der Sekanten s, auf der die Punkte $P(x_o/f(x_o))$ und $Q(x_n/f(x_n))$ liegen. $f'(x_o)$ erhält man als Grenzwert, wenn die Folge (x_n) gegen x_o konvergiert.

Man beachte, dass die Funktion f "hinreichend vernünftig" sein muss, damit für **jede** Nullfolge (h_n) $(h_n \neq 0)$, die man für h einsetzt, die zugehörige Folge der Differenzen-quotienten konvergiert.

Entsprechend muss f eine Funktion sein, bei der für jede Folge (x_n) $(x_n \neq x_o)$, die gegen x_o konvergiert, die Folge $\left(\frac{f(x_n) - f(x_o)}{x_n - x_o} \right)$ konvergieren.

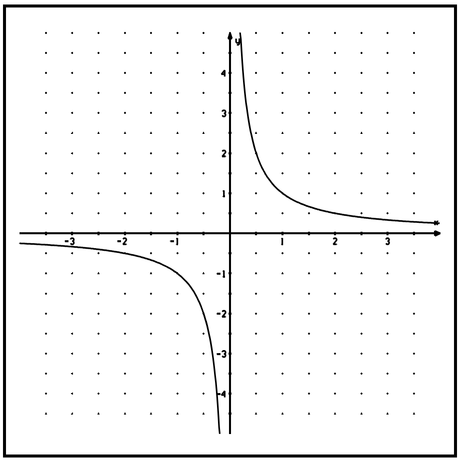
Will man die Ableitung f ´einer Funktion f ermitteln, ohne dass eine Formel zur Ermittlung dieser Ableitung bekannt ist, betrachtet man den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

dieser Funktion.

Falls der Grenzwert dieses Differenzenquotienten für jede Nullfolge, die h durchläuft (die Folgenglieder dürfen natürlich nicht den Wert Null annehmen), existiert, gilt: $f'(x_o) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$

$f'(x_o)$ gibt die Steigung der Funktion (Steigung der Tangente) f an der Stelle x_o an.



Links ist der Graph der durch $f(x) = \frac{1}{x}$ definierten Funktion f dargestellt.

Der Differenzenquotient von f an der Stelle x_o [3] ist:

$$\frac{\frac{1}{x_o + h} - \frac{1}{x_o}}{h}$$

Den Grenzwert (für $h \to 0$) dieses Quotienten erhält man durch geschicktes Umformen:

---

3 Es ist prinzipiell unerheblich, ob man bei der Berechnung von Differenzenquotienten an einer beliebigen Stelle diese Stelle mit x_o oder mit x bezeichnet.

$$\frac{\frac{1}{x_o + h} - \frac{1}{x_o}}{h} = \frac{\frac{x_o - (x_o + h)}{(x_o + h) \cdot x_o}}{h}$$

$$= \frac{x_o - (x_o + h)}{h \cdot (x_o + h) \cdot x_o}$$

$$= \frac{-h}{h \cdot (x_o + h) \cdot x_o}$$

$$= \frac{-1}{(x_o + h) \cdot x_o}$$

Also folgt:

$$\boxed{\mathbf{f(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}}}$$

Der Differenzenquotient der Wurzelfunktion ($f(x) = \sqrt{x}$) lautet an der Stelle x:

$$\frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$$

Auch dessen Grenzwert kann man durch geschickte Umformung bestimmen.

Durch Erweitern erhält man:

$$\frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x + h} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x + h} + \sqrt{x})}{h \cdot (\sqrt{x + h} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{x + h - x}{h \cdot (\sqrt{x + h} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}$$

Offenbar lässt sich nun der Grenzübergang $h \to 0$ durchführen:

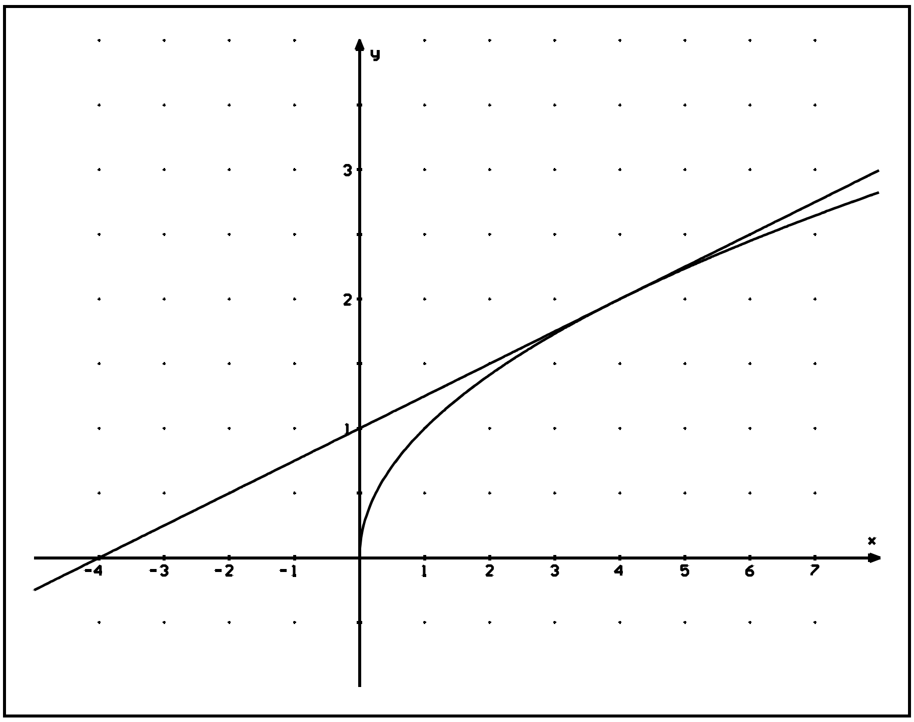
$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}$$

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}}$$

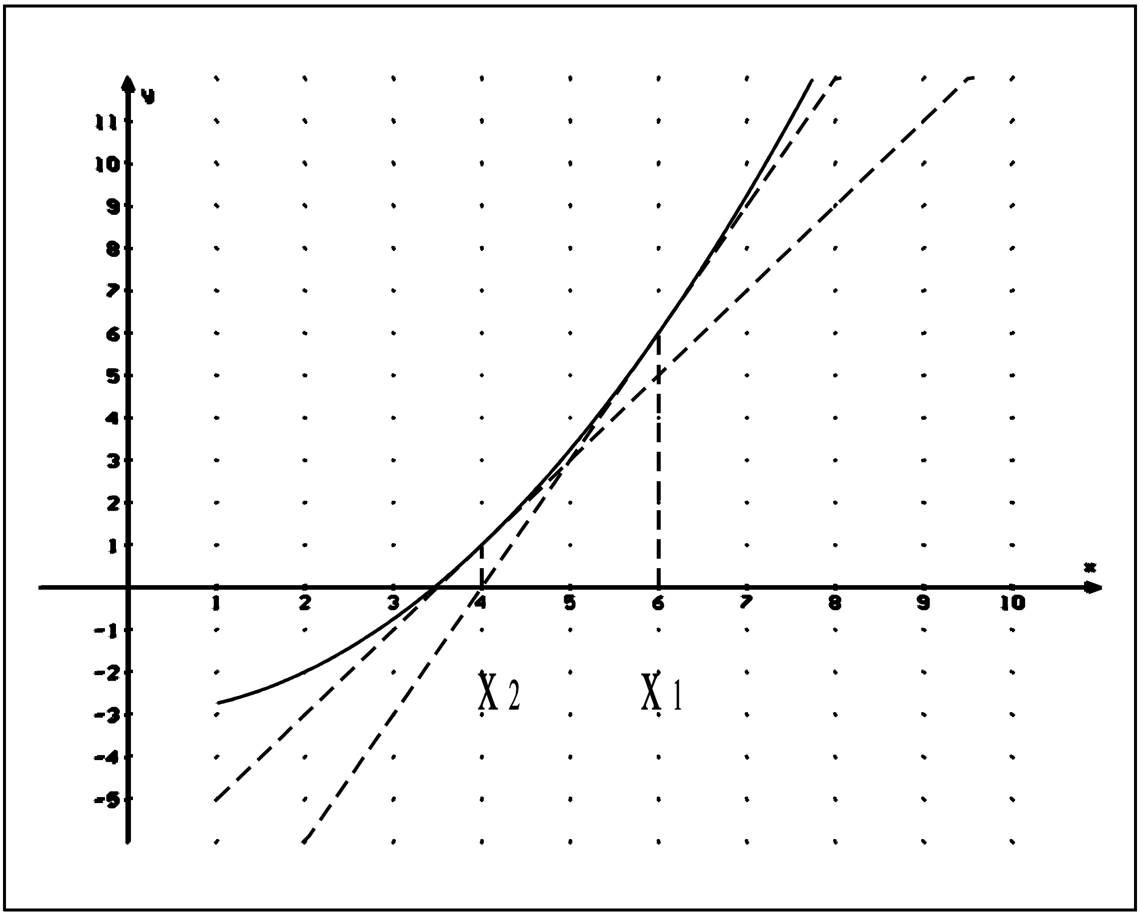
An der Stelle x = 4 müsste die Tangente an den Graphen der Wurzelfunktion demnach die Steigung 0,25 haben. Damit kann man die Tangentengleichung **t(x) = mx + n** an der Stelle 4 ermitteln, da der Punkt (4/2) auf der Tangente liegen muss:

$$
\begin{aligned}
t(x) &= mx + n \\
t(x) &= 0{,}25x + n \\
t(4) &= 0{,}25 \cdot 4 + n \\
2 &= 1 + n \\
1 &= n
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{t(x) = 0{,}25 \cdot x + 1}$$



Das newtonsche Näherungsverfahren



Es soll näherungsweise die Nullstelle des Graphen von f (durchgezogen) bestimmt werden. Im Punkt (x_1 / f(x_1)) wird eine Tangente an den Graphen von f gelegt. Man bestimmt den Schnittpunkt x_2 dieser Tangente mit der x-Achse. Im Punkt (x_2 / f(x_2)) wird wieder eine Tangente an den Graphen .....
x_2 berechnet sich nach folgender Formel:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Das Bogenmaß

Uns ist bekannt, dass man den Vollwinkel in 360 gleichgroße Winkel teilen kann . Jeden dieser Winkel können wir wieder in 60 gleichgroße Winkel teilen. (Ein solcher Winkel hätte dann die Größe 1´ (eine Minute).)

Diese Art der Unterteilung stammt von den Babyloniern, die mit dem sogenannten **Sexagesimalsystem** gerechnet haben. In diesem System konnte das Zeichen für die “1" auch 60 oder $60 \cdot 60 = 60^2$, ..., auch $^1/_{60}$, ... bedeuten. Die Vorliebe für die Zahl 6 konnte viele Gründe haben. Bekannt ist aber heute, dass die Räder babylonischer Wagen sechs Speichen hatten (siehe Bild eines babylonischen Streitwagens). Die Ägypter bevorzugten vier Speichen. Der

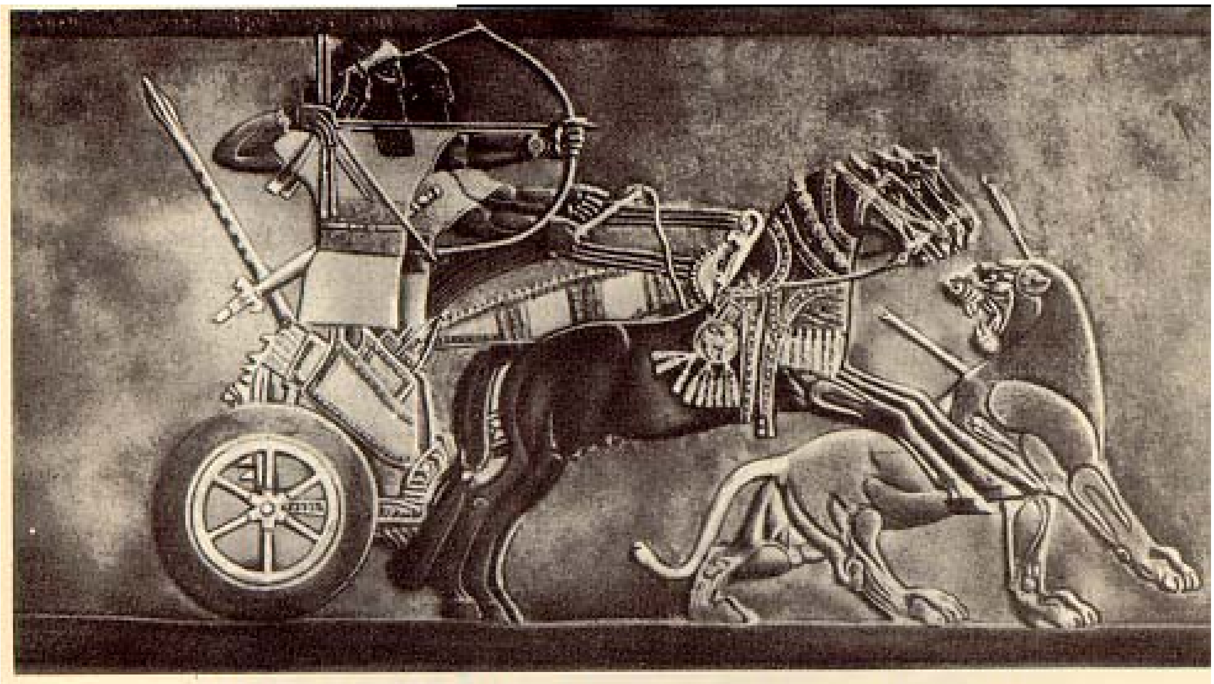


Abb. 21 Assurnaßirpal II. (883—859 v. u. Z.) auf seinem Streitwagen bei der Löwenjagd. Sechsspeichenrad

Umfang eines Kreises lässt sich leicht in sechs gleiche Teile zerlegen, wenn man den Radius dieses Kreises sechsmal abträgt. Es entsteht dann ein regelmäßiges Sechseck. (Begründung? Bitte mit dem Zirkel einmal diese Aufgabe durchführen.)

Das Zahlensystem der Babylonier hatte enorme praktische Vorzüge bei komplizierten Rechnungen, wie sie z.B. in der Astronomie, dem Kanalbau (künstliche Bewässerung),... notwendig waren. Dieses System wurde u.a. vom großen Astronomen Ptolemäus übernommen und hat seine Spuren bis auf den heutigen Tag hinterlassen (Zeiteinteilung!).
Nun ist den Mathematikern (zum Leidwesen **vieler** Schüler) eingefallen, dass man die Größe eines Winkels auch ganz anders messen kann. Wie dies geschieht, soll jetzt dargestellt werden:

Der Kreisumfang berechnet sich nach der Formel $U = 2\pi r$. Nimmt man einen Kreis mit dem Radius $r = 1$ (einen Einheitskreis), wird´s besonders einfach: $U = 2 \cdot \pi$.
2π ist also der Umfang eines Kreises mit dem Radius $r = 1$. Ich zeichne einfach einmal einen Winkel mit der Größe $\alpha = 49°$. Anschließend zeichne ich einen Kreis ($r = 1$!!!!), dessen Mittelpunkt der Scheitel des eben gezeichneten Winkels ist. Die Schenkel des Winkels schneiden nun aus dem Kreis einen Bogen mit ganz bestimmter Länge aus. (Bitte diese Tätigkeit selbst jetzt durchführen!!!) Die Länge dieses Bogens messe ich. (Ich könnte z.B. einen Faden genau über das Bogenstück legen und anschließend das Fadenstück an ein Lineal legen. Dann hätte ich einen Näherungswert für die Bogenlänge.)

Es ist doch nun wirklich gleichgültig, ob ich sage, dass der Winkel 49° groß ist oder, ob ich sage, wie lang das Bogenstück ist, das die Schenkel des Winkels aus dem Einheitskreis ausgeschnitten haben, oder?

Durch die Angabe dieser Bogenlänge weiß ich genau, wie groß der Winkel ist!

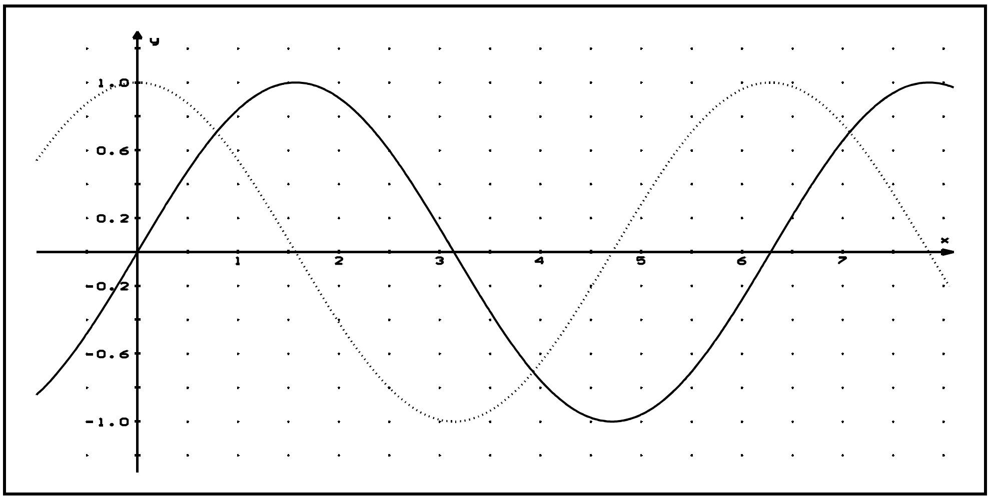
Beispiel:
Ein Winkel der Größe 60° schneidet ein Sechstel vom Umfang des Einheitskreises aus. Ein Sechstel des Umfangs 2π ist $\pi/3$.
Also entspricht dem Winkel mit der Größe 60° das Bogenmaß $\pi/3$ ($\approx 1{,}05$, wenn ich an $\pi \approx 3{,}14$ denke) . Man kann auch sagen, dass der Winkel im Bogenmaß die Größe $\pi/3$ hat. Oder kurz: **Der Winkel hat die Größe $\pi/3$** ($\approx 1{,}05$).
Eine Verwechslung mit dem Gradmaß ist nicht möglich, weil ich sagte, *der Winkel habe ungefähr die Größe* ***1,05*** und nicht : *Der Winkel sei ungefähr* ***1,05 Grad*** *groß.*

Wichtiger Hinweis für das Rechnen mit dem TR: Ihm muss man immer sagen, ob er Gradzahlen oder Zahlen im Bogenmaß “verarbeiten” soll. Dies geschieht dadurch, dass man den TR in den “MODUS” DEG (degree) stellt, wenn er im gewohnten Gradmaß rechnen soll. Stellt man den TR in den Modus (Zustand) RAD, rechnet er mit dem (noch ungewohnten) Bogenmaß.

Folgende Vokabeln aus Klasse 10 sind im zweiten Teil des Semesters recht nützlich, wobei man sich auch noch einmal an das ungeliebte Bogenmaß erinnern möge! (Studiere dazu notfalls die folgenden Seiten.)

to learn by heart	**0°**	**30°/ $\frac{\pi}{6}$**	**45°/ $\frac{\pi}{4}$**	**60°/ $\frac{\pi}{3}$**	**90°/ $\frac{\pi}{2}$**
sin (α)	0	0,5	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ $\approx$ 0,71	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ $\approx$ 0,87	1
cos (α)	1	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ $\approx$ 0,87	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ $\approx$ 0,71	0,5	0

Der Graph der Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Punkt (0/0).
Der Graph der Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse. (Siehe auch Seite 43.)



Trigonometrische Funktionen und das Bogenmaß
(Ohne Taschenrechner zu bearbeiten)

1.) Geben Sie die Nullstellen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion innerhalb des Intervalls [0/2π] exakt und auf eine Nachkommastelle gerundet an.

2.) Geben Sie eine Stelle des Intervalls [0/2π] an, an der sich die Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion schneiden.

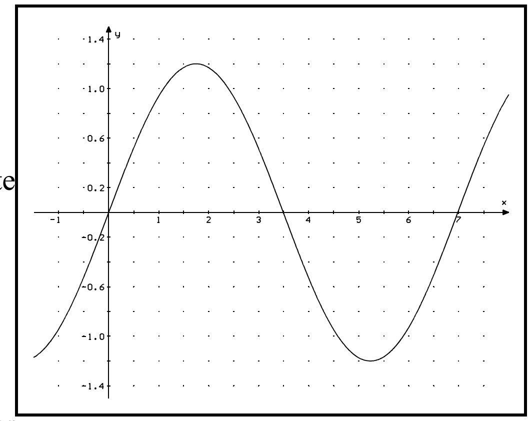
3.) Ist cos(3) positiv oder negativ? (Bitte eine kurze Begründung angeben, in der auf den Verlauf des Graphen der Kosinusfunktion Bezug genommen wird.)

4.) Zwischen welchen benachbarten ganzen Zahlen innerhalb des Intervalls [0/2π] liegt die Stelle, an der die Sinusfunktion ihren kleinsten Funktionswert annimmt? Zwischen welchen benachbarten ganzen Zahlen (innerhalb [0/2π]) liegt die Stelle, an der die Kosinusfunktion ihren kleinsten Funktionswert annimmt?

5.) An welchen Stellen innerhalb des Intervalls [0/2π] hat der Graph der Sinusfunktion waagerechte Tangenten? Geben Sie auch Näherungswerte (Dezimalzahlen auf eine Nachkommastelle gerundet) für diese Stellen an.

6.) Geben Sie zwei benachbarte ganze Zahlen (innerhalb von [0/2π]) an, zwischen denen die Sinusfunktion nur Tangenten mit negativer Steigung hat.

7.) Geben Sie Gründe an, warum der rechts gezeichnete Graph **nicht** der Graph der Sinusfunktion sein kann.



8.) In wie vielen Punkten schneiden sich der Graph der Sinusfunktion und der der Kosinusfunktion innerhalb des Intervalls [0/2π] ? Geben Sie die y-Koordinaten dieser Punkte an. (Exakt und auf zwei Nachkommastellen gerundet.)

9.) In welchem Punkt (innerhalb von [0/2π]) hat der Graph der Kosinusfunktion sein größtes Gefälle (seine kleinste Steigung)? Geben Sie die Koordinaten dieses Punktes exakt und auf zwei Nachkommastellen gerundet an.

10.) Welcher Wert ist jeweils größer:
cos (1) oder cos (2) ?
sin (1,5) oder sin (3) ? . Eine kurze textliche Erklärung mit Bezug auf den Verlauf der Graphen der Sinus- und der Kosinusfunktion ist gefordert.

1.) Da $\pi \approx 3{,}14$, sollte es nicht weiter schwierig sein, die entsprechenden Schnittpunkte der Graphen mit der x-Achse anzugeben. Die erste positive Nullstelle der Kosinusfunktion liegt also ungefähr bei 1,6 .
$\left(\frac{\pi}{2} \approx \frac{3{,}14}{2} = 1{,}57 \approx 1{,}6 \right)$.

2.) An der Stelle $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}8$ (aber nicht nur dort!) schneiden sich die Graphen (im Gradmaß entspricht dies dem Winkel mit der Größe 45°).

3.) Der Graph der Kosinusfunktion verläuft zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ (also ungefähr zwischen 1,6 und 4,7) unterhalb der x-Achse. Damit folgt $\cos(3) < 0$!

4.) $\sin(270°) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin(4{,}71238...) = -1$. Einen kleineren Funktionswert als -1 hat die Sinusfunktion nicht. Die Sinusfunktion hat also zwischen den x-Werten 4 und 5 ihren kleinsten Funktionswert.

5.) An den Stellen $\frac{\pi}{2}$ ($\approx 1{,}6$) und $\frac{3\pi}{2}$ ($\approx 4{,}7$) hat der Graph der Sinusfunktion jeweils eine waagerechte (horizontale) Tangente.

6.) Der Graph der Sinusfunktion fällt (die Funktionswerte nehmen ab) zwischen $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ($\approx 1{,}6$) und $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ ($\approx 4{,}7$); der Graph hat also auf jeden Fall zwischen den x-Werten 2 und 3 Tangenten mit negativer Steigung.

7.) Z.B.: Die Nullstellen stimmen nicht, der größte und der kleinste Funktionswert ist jeweils falsch ....

8.) Sie schneiden sich in zwei Punkten, die die y-Koordinaten $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ haben.
$\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}71$.

9.) Wenn man den Graphen der Kosinusfunktion “im Kopf” hat, weiß man, dass dies im Punkt $\left(\frac{\pi}{2} / 0 \right)$ der Fall ist. ($\approx$ (1,57 / 0))

10.) Die Nullstellen muss man im Kopf haben!!! cos (1) ist positiv, cos (2) ist negativ.
sin (1,5) ist fast gleich 1 und sin (3) kann nicht viel größer als Null sein, weil die Stelle $x = 3$ nicht weit von der Nullstelle π entfernt ist.

Die Lösung der Gleichung

$\mathbf{x^2 + px + q = 0}$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Es muss also entweder

$$x + \frac{p}{2} = +\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

oder $\quad x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad$ gelten.

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

sind also die Lösungen.

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir betrachten im Folgenden nur Funktionen, die "beliebig" differenzierbar sind. Zur Funktion f mit der Definitionsmenge D sollen also auch f', f'',... auf D existieren. Dies ist z.B. für alle Polynomfunktionen (ganzrationale Funktionen) erfüllt. Auch die trigonometrischen Funktionen, die im zweiten Kapitel behandelt werden, haben diese "angenehme" Eigenschaft.

Definition:
Die Funktionswerte von f haben genau dann an einer Stelle x_E ein relatives Maximum, wenn es eine Umgebung von x_E gibt, in der kein Funktionswert von f größer als $f(x_E)$ ist.
(Entsprechend wird der Begriff relatives Maximum definiert.)

Satz:
Wenn f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, können die Funktionswerte von f nur dann an der Stelle x_E ein relatives Extremum (relatives Maximum oder relatives Minimum) haben, wenn der Graph von f an der Stelle x_E eine waagerechte Tangente hat.

Wenn f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist,

muss also $f'(x_E) = 0$ gelten, wenn die Funktionswerte von f ...

Es ist **notwendig,** dass $f'(x_E) = 0$ gilt, wenn an der Stelle x_E ein relatives ....

Wenn **nicht** $f'(x_E) = 0$ gilt, wird f an der Stelle x_E sicherlich **kein** relatives Extremum haben.

Wenn aber $f'(x_E) = 0$ gilt, kann ich **nicht sicher** sein, dass die Funktionswerte von f an der Stelle x_E ein rel. Extrum haben: Vielleicht lautet die Funktionsgleichung $f(x) = x^3$ und es wird der x-Wert Null betrachtet.

$f'(x_E) = 0$ ist **keine hinreichende** Bedingung dafür, dass die Funktionswerte von f an der Stelle x_E ein relatives Extremum haben.

Wir betrachten wieder den einfachen Fall, dass **f auf ganz ℝ definiert ist**:

Satz:

Wenn $f'(x_E) = 0$ **und** $f''(x_E) > 0$ gilt, kann ich sicher sein, dass f an der Stelle x_E ein relatives Minimum hat.

Es reicht aus zu wissen, dass $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) > 0$ gilt, um sicher zu sein, dass...

Es ist **hinreichend** zu wissen, dass $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) > 0$ gilt, um sagen zu können, dass f an der Stelle x_E ein relatives Minimum hat.

Es muss aber nicht unbedingt $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) > 0$ gelten, damit ich sicher bin,....

Diese Bedingung ist **nicht notwendig:**

Die Funktion f könnte ja durch $f(x) = x^4$ definiert sein.

Wenn aber $\mathbf{f'(x_E) = 0}$ **und** $\mathbf{f''(x_E) > 0}$ gilt, bin ich **absolut sicher**, dass an der Stelle x_E ein relatives Extremum liegt.

Beweis:

Aus $f''(x_E) > 0$ folgt, dass f' in einer ganzen Umgebung von x_E streng monoton steigt. (Die Werte von f'' geben die Steigung von f' an!!!) **Monotoniesatz!**

Wir haben zwar nur vorausgesetzt, dass f'' an der Stelle x_E positiv ist, doch für die Funktionen, die wir hier betrachten, lässt sich zeigen (auf diesen Beweis verzichten wir, weil er etwas kompliziert ist) , dass für alle Werte x , die "etwas" kleiner und alle Werte x, die "etwas" größer als x_E sind, $f''(x)$ auch noch positiv sein muss.

Da $\mathbf{f'(x_E) = 0}$ vorausgesetzt war, muss also $f'(x)$ "links von x_E" negativ und "rechts von x_E" positiv sein. (Zeichenwechsel von f'!) Damit muss der Graph von f "links von x_E" fallen und "rechts von x_E" steigen. Damit bleibt den Funktionswerten von f nichts anderes übrig, als an der Stelle x_E ein relatives Minimum zu haben. ■

Entsprechende Aussagen lassen sich über Wendepunkte machen, wenn man sich verdeutlicht, dass Wendestellen solche Stellen sind, an denen die Steigung von f ein relatives Extremum hat.

Wenn also eine Polynomfunktion an einer Stelle x_W einen Wendepunkt haben soll, **muss** an dieser Stelle $f''(x_W) = 0$ gelten.

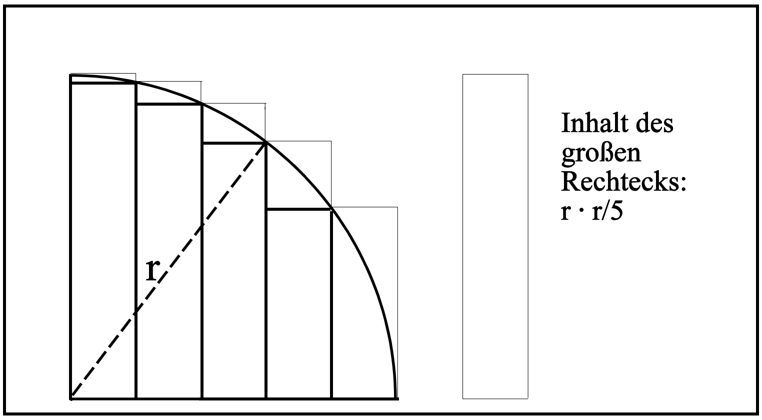
Es **muss aber nicht** $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$ gelten, wenn an der Stelle x_W ein Wendepunkt liegen soll!!!

Achten Sie auf einen korrekten Gebrauch der Vokabel "muss" !

Bestimmung von Flächeninhalten

Flächeninhalte von ebenen Figuren, die durch Strecken begrenzt werden, lassen sich “elementar” bestimmen. Inhalte von Quadraten und Rechtecken kann wohl jeder ausrechnen, bei Dreiecken muss man sich an “ $\frac{1}{2}$ mal Länge der Grundseite mal Länge der zugehörigen Höhe” erinnern , Vielecke lassen sich in Dreiecke unterteilen,...
(Bei rechtwinkligen Dreiecken sucht man sich hoffentlich immer geschickt eine Grundseite aus!?)

Wie sieht es mit Flächen aus, die nicht nur durch Strecken begrenzt sind? Dieses Problem ist für uns nicht ganz neu, denn in Klasse 9 wurde eine Formel zur Bestimmung des Inhalts eines Kreises ermittelt. Es gilt: $A_{Kreis} = \pi \cdot r^2$.



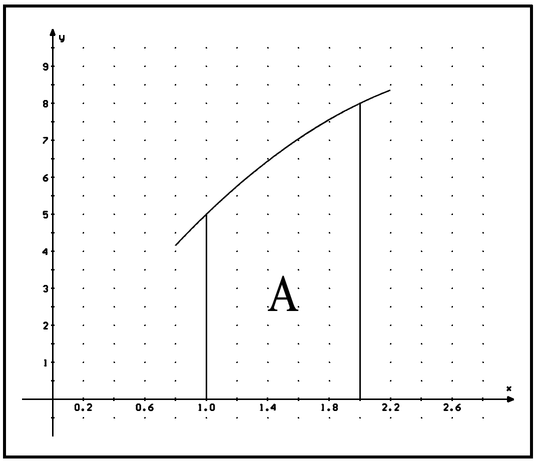
Man kann den Radius eines Kreises in fünf gleiche Teile unterteilen. Dann lassen sich dem Viertelkreis mit dem Radius r vier gleichbreite Rechtecke einbeschreiben. Gleichzeitig werden fünf Rechtecke umbeschrieben. Der Flächeninhalt der umbeschriebenen Rechtecke ist um $r^2/5$ größer als der Inhalt der einbeschriebenen Rechtecke. Der Inhalt des Viertelkreises liegt zwischen dem Inhalt der einbeschriebenen und dem der umbeschriebenen Rechtecke:

$$A_{einb} < A_{Viertelkreis} < A_{umb}$$

Einen genaueren Wert für den Inhalt des Viertelkreises erhält man, wenn der Radius nicht in fünf gleiche Teile unterteilt wird, sondern in zehn, in tausend ....
Wir erhalten bei diesem Vorgehen eine Intervallschachtelung für den Inhalt des Viertelkreises!
Den Inhalt eines einzelnen Rechtecks berechnen wir mit Hilfe des Satzes des Pythagoras:
Die Breite der Rechtecke beträgt jeweils $\frac{r}{5}$ (unterteilen wir den Radius in n gleiche Teile, hat ein einzelnes Rechteck die Breite $\frac{r}{n}$), die Höhe des dritten Rechtecks kann aus der Gleichung $(3 \cdot \frac{r}{5})^2 + h^2 = r^2$ ermittelt werden.

Im Folgenden werden wir versuchen, das Vorgehen zur Bestimmung des Kreisinhalts auf andere Flächen zu übertragen.

Aufagbe 1: Bestimme Scheitel und Nullstellen der durch $f(x) = -x^2 + 6x$ definierten Parabel und fertige eine Skizze im Intervall [- 1 / 7] an.
(Tipp: Bitte hier **nicht** die p-q-Formel zur Nullstellenberechnung anwenden. Nutze bei der Scheitelbestimmung die Symmetrie der Parabel aus!)



Links ist ein Ausschnitt der Parabel dargestellt, die in der vorigen Aufgabe gezeichnet wurde. Gesucht ist der Flächeninhalt A derjenigen Fläche, die von

- der x-Achse
- den beiden Parallelen zur y-Achse
- und dem Graphen von f

begrenzt wird.

Unterteilt man ein Intervall in gleichlange Teilintervalle, spricht man von einer **äquidistanten** Unterteilung / Zerlegung des Intervalls. [1]

Aufgabe 2:

a) Unterteile das Intervall [1 / 2] äquidistant in fünf Teilintervalle und zeichne die zugehörigen einbeschriebenen und umbeschriebenen Rechtecke in die Zeichnung von Aufgabe 1 ein. Berechne die Höhen aller Rechtecke.

b) Berechne den Gesamtinhalt aller einbeschriebenen (U_5) und aller umbeschriebenen Rechtecke (O_5). [2] Um welchen Wert ist O_5 größer als U_5 ?
Zeige, dass $O_5 - U_5 = 0{,}2 \cdot (f(2) - f(1))$ gilt. Wie lässt sich dieser Sachverhalt veranschaulichen?

e) Bilde das **arithmetische Mittel** von U_5 und O_5 und begründe, warum dieser Wert etwas kleiner sein muss als A. (Tipp: Veranschauliche in der Zeichnung aus Aufgabe 1 die Fläche, deren Inhalt $\frac{U_5 + O_5}{2}$ ist.)

---

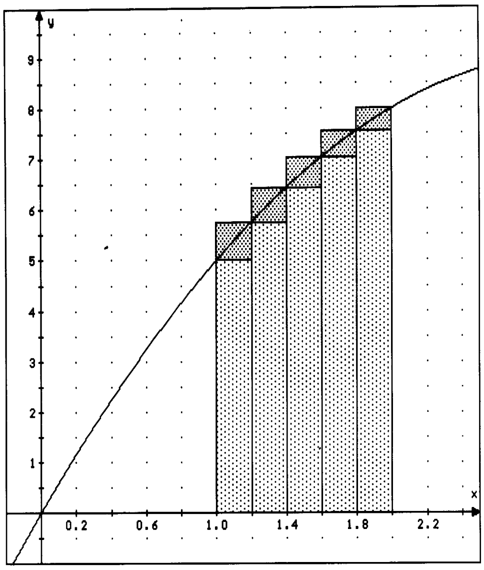
[1] aequus, lat. = gleich; distantia, lat. = Abstand

[2] Die Bezeichnungen U_5 und O_5 leiten sich von den Begriffen “Untersumme” und “Obersumme” ab.

Definition:
Ist eine äquidistante Zerlegung (eine Unterteilung) eines Intervalls [a / b] in n Teilintervalle vorgegeben, so versteht man unter der zu dieser Zerlegung gehörenden **Untersumme** den Wert

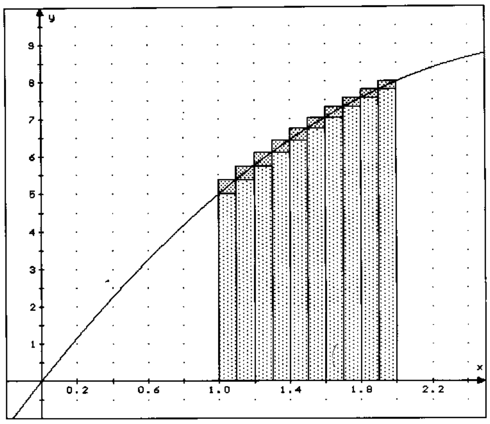
$$f(x_{k1}) \cdot \frac{b-a}{n} + f(x_{k2}) \cdot \frac{b-a}{n} + ... + f(x_{kn}) \cdot \frac{b-a}{n}$$

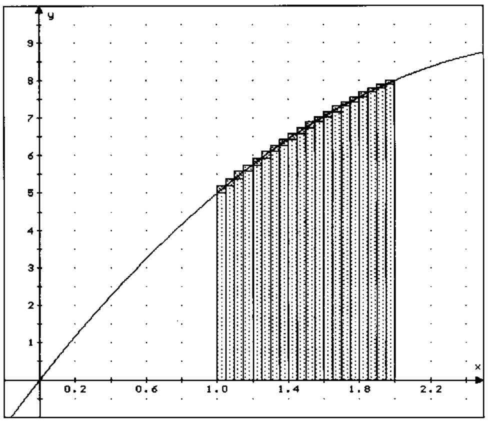
Dabei ist x_{k1} die Stelle, an der die Funktion f ihren kleinsten Funktionswert im Intervall $[a / a + \frac{b-a}{n}]$ hat, x_{k2} ist die Stelle, an der die Funktion f ihren kleinsten Funktionswert im Intervall $[a + \frac{b-a}{n} / a + 2 \cdot \frac{b-a}{n}]$ hat, ... Der Begriff **Obersumme** wird entsprechend definiert: Man muss nun lediglich aus jedem Intervall diejenigen Stellen $x_{g1,...}$ wählen, an denen f jeweils den größten Wert annimmt. [3]



In der nebenstehenden Graphik wird dargestellt, wie der gesuchte Flächeninhalt durch U_5 und O_5 eingeschachtelt wird.
Der Inhalt der fünf kleinen Rechtecke, die auf den Rechtecken "sitzen", deren Inhalt gleich U_5 ist, gibt den Unterschied zwischen U_5 und O_5 an.
Wird das Intervall [1 / 2] nun äquidistant in zehn, zwanzig, ... Teilintervalle zerlegt, erhält man eine Intervallschachtelung für den gesuchten Flächeninhalt.

[3] Bei "normalen / vernünftigen" Funktionen (die Mathematiker sagen: "bei stetigen Funktionen") gibt es diese Stellen x_{k1} , ... , x_{kn} und x_{g1} , ... immer. Da in unserem Beispiel f eine monotone Funktion ist, sind diese Stellen immer die Randpunkte der einzelnen Teilintervalle.





Die beiden Bilder (links) veranschaulichen die zu n=10 bzw. n=20 gehörenden Unter- und Obersummen.

Aufgabe:
Berechne (natürlich darf die vorgegebene Wertetabelle benutzt werden) die Werte von U_{10}, O_{10}, U_{20}, O_{20}.
Um wie viel Prozent kann der gesuchte Flächeninhalt höchstens vom arithmetischen Mittel der Zahlen U_{20} und O_{20} abweichen?

x	f(x)
1	5
1,05	5,1975
1,1	5,39
1,15	5,5775
1,2	5,76
1,25	5,9375
1,3	6,11
1,35	6,2775
1,4	6,44
1,45	6,5975
1,5	6,75
1,55	6,8975
1,6	7,04
1,65	7,1775
1,7	7,31
1,75	7,4375
1,8	7,56
1,85	7,6775
1,9	7,79
1,95	7,8975
2	8

Tabelle für die obige Aufgabe ($f(x) = -x^2 + 6x$)

Man kann sich freuen, wenn man folgende Ergebnisse erhalten hat:
$U_{10} = 6{,}515$
$O_{10} = 6{,}815$
Die nächsten beiden Werte sind auf vier Nachkommastellen gerundet:
$U_{20} \approx 6{,}5912$
$O_{20} \approx 6{,}7412$

Es gilt $6{,}5912 < A < 6{,}7412$.

Das arithmetische Mittel $0{,}5 \cdot (\, 6{,}5912 + 6{,}7412 \,)$ weicht absolut [4] von 6,5912 und von 6,7412 um 0,075 ab. Die relative Abweichung [5] des Wertes 6,6662 von 6,5912 und von 6,7412 beträgt rund 1%. Da A zwischen den Werten U_{20} und O_{20} liegt, kann A nicht um mehr als ca. 1% von 6,6662 abweichen. [6]

Aufgabe 3: Gesucht ist der Inhalt A_1 der Fläche die von der x-Achse, der Normalparabel und der Parallelen zur y-Achse durch den Punkt (1 / 0) begrenzt wird.

- Fertige eine Skizze der Normalparabel im Intervall [- 0,1 / 1,1] an und wähle dabei einen sinnvollen Maßstab.
- Unterteile das Intervall [0 / 1] äquidistant in n = 5 Teilintervalle und zeichne die zu U_5 und O_5 gehörenden Rechtecke ein.
- Ist das arithmetische Mittel von U_5 und O_5 größer oder kleiner als der gesuchte Flächeninhalt?
- Gib einen Näherungswert für A_1 an.

Aufgabe 4: Gesucht ist der Inhalt A_2 der Fläche, die von der x-Achse, der Normalparabel und der Parallelen zur y-Achse durch den Punkt (2 / 0) begrenzt wird. Berechne U_8 und bestimme einen Näherungswert für A_2 .

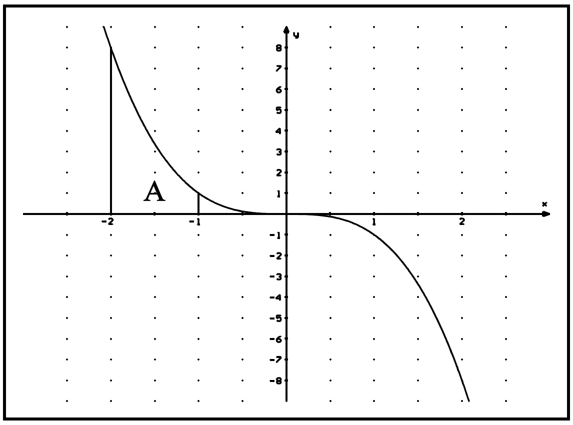
---

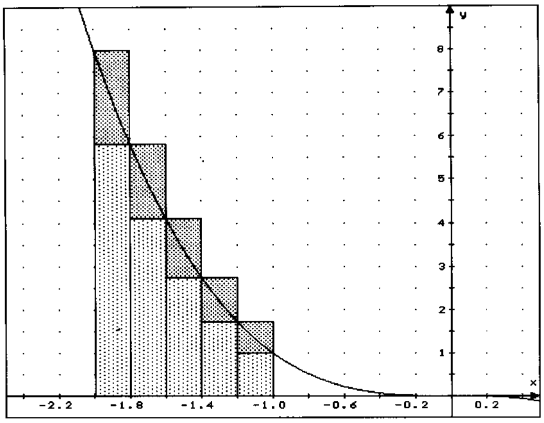
4 $0{,}5 \cdot (\, 6{,}5912 + 6{,}7412 \,) = 6{,}6662$. Absolute Abweichung: $\left| 6{,}6662 - 6{,}7412 \right|$.

5 Relative Abweichung des Wertes 6,6662 von 6,7512: $\left| \dfrac{6{,}6662 - 6{,}7512}{6{,}7512} \right| = 0{,}011\ldots$.

6 Ich bin mir sicher, dass wir mit dem Wert 6,6662 den tatsächlichen Flächeninhalt A schon viel besser als auf 1% angenähert haben. Später lässt sich leicht nachprüfen, dass der gesuchte Inhalt A schon auf 0,1 Promille genau bestimmt wurde.

Wir haben am Beispiel monoton wachsender Funktionen [7] gesehen, wie sich über die zunehmende Unterteilung eines Intervalls [a / b] eine konvergente Folge [8] von Untersummen und eine konvergente Folge von Obersummen ermitteln lässt, die eine Intervallschachtelung[9] zur Bestimmung von Flächeninhalten liefert.
Selbstverständlich gelingt dies genau so einfach (?), wenn eine monoton fallende Funktion untersucht wird. Dies soll an einem weiteren Beispiel demonstriert werden:
Gegeben sei die durch $f(x) = - x^3$ definierte Funktion f.
Gesucht ist der Inhalt der Fläche zwischen der x- Achse, dem Graphen von f und den beiden Parallelen zur y-Achse durch die Punkte (- 2 / 0) und (- 1 / 0).





Die in der rechten Grafik veranschaulichten Untersummen und Obersummen haben die Werte 3,08 und 4,48.

Aufgabe 5: Bestätigen Sie die oben angegebenen Werte und geben Sie einen Näherungswert für den Inhalt A an.

---

7 Def.: Eine Funktion f heißt in einem Intervall [a/b] genau dann monoton wachsend, wenn "mit zunehmenden x-Werten" die Funktionswerte auf keinen Fall kleiner werden. Mathematisch formuliert: Aus "$x_1 < x_2$" folgt "$f(x_1) \leq f(x_2)$".
Bei der Normalparabel wachsen die Funktionswerte beispielsweise für alle x, die nicht negativ sind, monoton. Aber auch eine Parallele zur x-Achse gehört nach der obigen Definition zu einer monoton wachsenden Funktion - sie ist gleichzeitig monoton fallend!

8 Konvergente Folgen sind gerade die Folgen, die einen Grenzwert (Limes) haben. Ggf. muss man hier im Ordner der Klasse 11 nachschauen und sich Vergangenes ins Gedächtnis zurückrufen!

9 Unter einer Intervallschachtelung versteht man eine Folge (I_n) von Intervallen, die alle "ineinander enthalten sind", für die also $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset$...gilt, wobei zusätzlich die Länge der Intervalle gegen Null konvergiert. Jede Intervallschachtelung definiert in der Menge der reellen Zahlen genau eine Zahl: Dies ist gerade diejenige Zahl, die in **allen** Intervallen enthalten ist. Die Klasse 9 liegt zwar lange zurück, aber vielleicht erinnert man sich trotzdem noch an die Intervallschachtelung für die "Wurzel aus Zwei"?!

Bezeichnet man die Unterteilungspunkte des Intervalls [- 2 / - 1] mit x_o , x_1 , ... x_5 (dabei gilt $x_o = -2$ und $x_5 = -1$) , ist der Wert der Untersumme U_5 die Summe

$$f(x_1)\cdot(x_1 - x_o) + f(x_2)\cdot(x_2 - x_1) + f(x_3)\cdot(x_3 - x_2) + f(x_4)\cdot(x_4 - x_3) + f(x_5)\cdot(x_5 - x_4)$$

Da die Differenzen $x_1 - x_o$, ... , $x_5 - x_4$ alle denselben Wert haben, bezeichnet man ihn üblicherweise als Δx. Es gilt also: $\Delta x = x_1 - x_o = ... = x_5 - x_4$.

U_5 lässt sich dann in abgekürzter Form darstellen:

$$\mathbf{U_5 = \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i) \cdot \Delta x} \quad (n = 5)$$

Für die Obersumme ergibt sich analog

$$\mathbf{O_5 = \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i) \cdot \Delta x} \quad (n - 1 = 4)$$

Betrachten wir noch einmal das Ausgangsbeispiel ($f(x) = -x^2 + 6x$):
Es wurden U_5, U_{10}, U_{20}, O_5, O_{10} und O_{20} berechnet. Vergrößert man fortlaufend die Anzahl der (gleichlangen) Teilintervalle von [1 / 2] , erhält man eine monoton wachsende Folge von Untersummen und eine monoton fallende Folge von Obersummen:

$$\mathbf{U_5 \leq U_{10} \leq U_{20} \leq .... \leq O_{20} \leq O_{10} \leq O_5}$$

$[U_5/O_5]$, $[U_{10}/O_{10}]$, $[U_{20}/O_{20}]$, ... liefert uns eine Intervallschachtelung, die den gesuchten Flächeninhalt A definiert.

Das gesuchte A ist also Grenzwert der Folge (U_n) und selbstverständlich auch Grenzwert der Folge (O_n) .
Daher ist:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n}$$

. Diesen Grenzwert stellt man symbolisch in folgender Form dar:

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

wird **„ Integral von a bis b eff von iks de iks „** [10] gelesen.

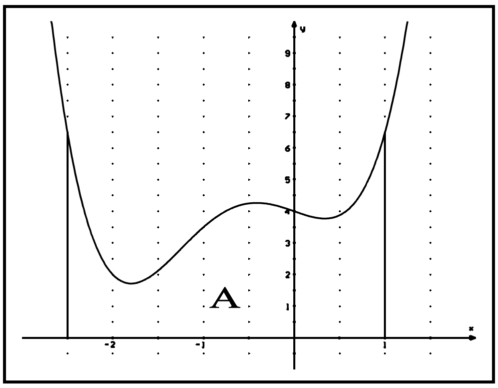
Damit ist erklärt, was man unter einem Integral versteht. Etwas salopp könnte man formulieren: "Ein Integral ist ein Grenzwert von Obersummen (bzw. von Untersummen)."

In unserem Beispiel gilt a = 1 und b = 2 sowie $f(x) = -x^2 + 6x$. Der gesuchte Flächeninhalt A wird also formal folgendermaßen angegeben:

$$\boxed{A = \int_{1}^{2} (-x^2 + 6x)\, dx}$$

Fassen wir zusammen:
Der Flächeninhalt A der Fläche, die zwischen dem Graphen von f, der x-Achse und den beiden Parallelen zur y-Achse durch die Punkte (1/0) und (2/0) liegt, wurde mit Hilfe von Obersummen und Untersummen bestimmt.
Wir haben Näherungsrechnungen stets an monoton fallenden bzw. monoton wachsenden Funktionen durchgeführt. Ohne Beweis soll noch ergänzt werden, dass unser Verfahren auch "funktioniert", wenn der Graph "wellenförmig" verläuft:

Der links dargestellte Graph gehört zu der durch



$f(x) = x^4 + 2{,}5x^3 - x + 4$ definierten Funktion f. Der Flächeninhalt A ist gleich

$$\int_{-2,5}^{1} f(x)\, dx$$

und lässt sich "wie gehabt" durch Ober- bzw. Untersummen beliebig genau annähern.

---

[10] integrare , lat. = heil, unversehrt machen, zusammenfassen. Diese Darstellung wurde in ähnlicher Form erstmalig von Herrn **G.W. Leibniz** (1646-1716) gewählt. (Siehe Anhang 2.)

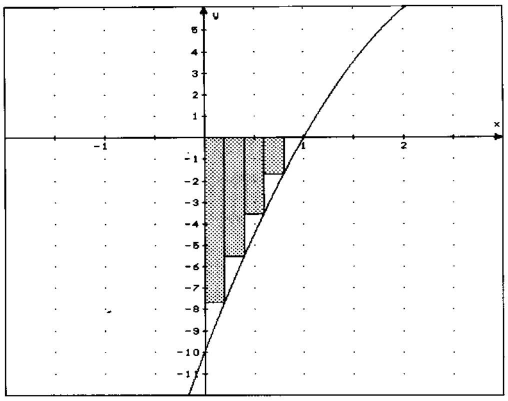
Definition: Für jede "vernünftige" (stetige , siehe S.3) Funktion f , die auf einem Intervall [a/b] definiert ist, gilt: $\int_a^b f(x)\,dx$ ist der Grenzwert der Folge von Untersummen (bzw. Obersummen, das ist egal), die mittels äquidistanter Zerlegungen bestimmt werden.

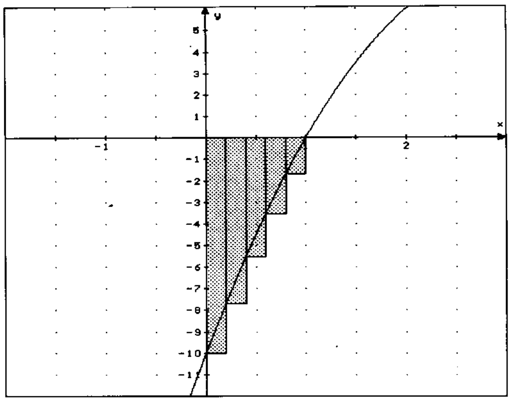
Hinweis: Die Länge der Teilintervalle, in die [a/b] zerlegt wird, konvergiert bei diesem Vorgehen automatisch gegen Null.

Jetzt muss aber aufgepasst werden, denn mit der Definition des Integrals über Untersummen und Obersummen haben wir uns etwas "eingehandelt": Betrachten wir einmal die Fläche, die von der x-Achse, der y-Achse und der durch $f(x) = -2\cdot(x-3)^2 + 8$ definierten Parabel eingeschlossen wird. Diese Fläche hat fast die Form eines Dreiecks und ihr Inhalt wird also etwas kleiner als 5 sein.

Aufgabe 6: Skizziere die durch $f(x)=-2\cdot(x-3)^2+8$ definierte Parabel für $x\in[-0{,}5/5{,}5]$.

Wenn uns die Aufgabe gestellt wird, $\int_0^1 (-2\cdot(x-3)^2+8)\,dx$ zu berechnen, werden wir wie gewohnt vorgehen: Wir schachteln die oben beschriebene Fläche wieder durch Rechtecke ein (das Intervall [0 / 1] wird äquidistant in fünf Teilintervalle unterteilt) und erhalten dann folgende Bilder:





Aufgabe 7: In welchem Bild wird die Untersumme U_5 , in welchem Bild wird die Obersumme O_5 veranschaulicht?
(Wichtiger Hinweis: Man möge die **Definition beachten**, dass man beim Bilden der Untersumme jeweils **das** Element aus dem Teilintervall wählen muss, ...)

Ich habe vom Computer (ich bin gerne faul) die beiden Werte berechnen lassen:

$U_5 = -5{,}68$ und $O_5 = -3{,}68$!!!! Berechnen wir $0{,}5 \cdot (-5{,}68 + (-3{,}68))$, ergibt sich

der Näherungswert $\int_0^1 f(x)\,dx \approx -4{,}68$

Integrale können negative Werte haben!!!

Im obigen Beispiel liefert $\int_0^1 f(x)\,dx$ also nicht direkt den Flächeninhalt, den wir gesucht haben (Flächeninhalte können wohl kaum negativ sein). Da der Graph im Intervall [0/1] nie oberhalb der x-Achse verläuft, hat f in diesem Intervall keine positiven Funktionswerte und die Obersummen und Untersummen müssen wegen der negativen Funktionswerte von f innerhalb von [0/1] negative Werte haben.

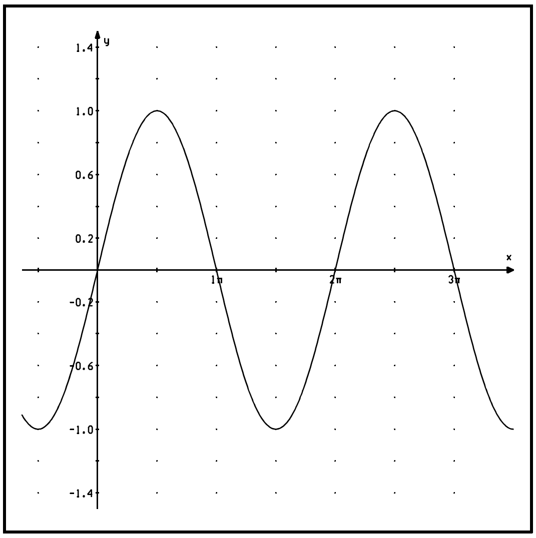
Ganz offensichtlich ist aber in unserem Beispiel $\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|$ (der Betrag des Integrals) gleich dem gesuchten Flächeninhalt.

Integrale sind nützlich zum Berechnen von Flächeninhalten! Aber bitte immer darauf achten, ob der Graph oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse verläuft!!!

Aufgabe 8: Berechne $\int_0^{2\cdot\pi} \sin(x)\,dx$.

(Die Lösung hat man in t = Nullkommanix Sekunden. Mit einem Computer dauert es deutlich länger.)

Links “ein Angebot” für alle, denen der Graph der Sinusfunktion nicht mehr geläufig ist.



Die Flächen, die der Graph in den Intervallen [0 / π] und [π / 2·π] mit der x-Achse einschließt, haben denselben Inhalt.

Es ist hoffentlich offensichtlich, dass sich bei der näherungsweisen Berechnung von $\int_0^{2\cdot\pi} \sin(x)\,dx$ “die Untersummen/ Obersummen über dem Intervall [0/π] gegen die Untersummen/Obersummen über dem Intervall [π/2·π] wegheben”.

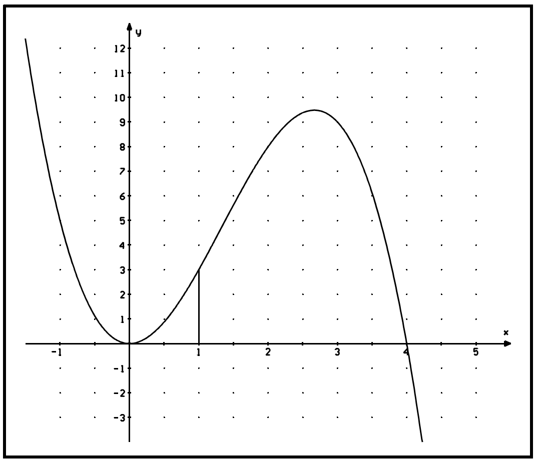
Anschaulich ist der folgende Satz klar (auf einen nur langweilenden Beweis, der keinerlei wirklich mathematische Ansprüche stellt, verzichten wir):

Die Additivität des Integrals

Ist f auf dem Intervall [a / b] definiert (und dort natürlich stetig = "vernünftig") und ist c eine Zahl zwischen a und b, so gilt:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

Zur Veranschaulichung des obigen Satzes:



Der links gezeichnete Graph gehört zur Funktionsgleichung $f(x) = -x^3 + 4x^2$.
Die Fläche, die der Graph im Intervall [0/4] mit der x-Achse einschließt, hat den Inhalt

$$\int_0^4 (-x^3 + 4x^2)\,dx \quad .$$

Diesen Inhalt kann ich natürlich auch "häppchenweise" durch

$$\int_0^1 (-x^3 + 4x^2)\,dx + \int_1^4 (-x^3 + 4x^2)\,dx$$

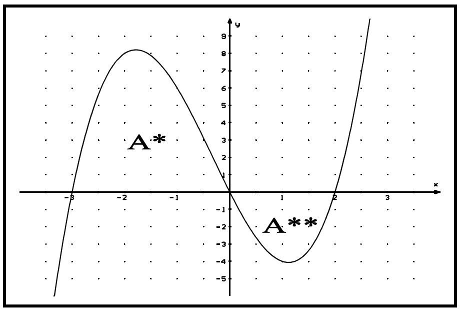
berechnen (was kein vernünftiger Mensch macht, was aber nichtsdestotrotz dasselbe Ergebnis liefern würde).

Ohne also überhaupt zu wissen, wie groß nun $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$ tatsächlich ist, ergibt sich wegen

$$\int_0^{2\cdot\pi} \sin(x)dx = \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx + \int_{\pi}^{2\cdot\pi} \sin(x)\,dx :$$

$$\int_0^{2\cdot\pi} \sin(x)dx = 0.$$

So **trivial** [11] der Additionssatz erscheint (er ist hoffentlich jedermann und jeder Frau zugänglich), so nützlich kann er sein. Eine erste Anwendung haben wir im Zusammenhang mit der Sinusfunktion studiert [12] .
Wesentlicher wird der Additionssatz, wenn wir z.B. den Flächeninhalt derjenigen Fläche bestimmen wollen, die der zu $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$ gehörende Graph mit der x-Achse einschließt:



Die Gesamtfläche, deren Inhalt A bestimmt werden soll, liegt teilweise oberhalb der x-Achse (im zweiten Quadranten) und teilweise unterhalb der x-Achse (im vierten Quadranten). A ist also die Summe der beiden Inhalte A* und A** .

Aufgabe 9: Warum ist A nicht gleich $\int_{-3}^{2} (x^3 + x^2 - 6x)\,dx$?

Lösung:
Wenn wir einen Näherungswert für A über Untersummen (Obersummen) berechnen, stellen wir fest, dass sich im Bereich von - 3 bis 0 positive Werte und im Bereich von 0 bis 2 negative Werte ergeben. Addiert man nun alle Werte, wie das beim Berechnen der Untersummen über dem Intervall [- 3/2] getan werden muss, erhalten wir einen falschen Näherungswert für A, denn

$$\int_0^2 (x^3 + x^2 - 6x)\,dx \qquad \textbf{ist negativ !!!!}$$

---

11 Lieblingswort der Mathematiker und auch der Mathematikerinnen; sie benutzen es für alle mathematischen Sachverhalte, die sie verstanden haben, wobei völlig unerheblich ist, ob der Gesprächspartner den Sachverhalt auch verstanden hat. Schüler benutzen in diesem Zusammenhang das Wort “logisch”: Alle Dinge, die sie nicht verstehen, werden zu gerne als “unlogisch” bezeichnet, wobei wiederum völlig gleichgültig ist, ob der Sachverhalt nun logisch einwandfrei ist oder nicht. trivialis, lat. = jedermann zugänglich, allbekannt; Ursprung: Das lateinische *trivium* setzt sich aus *tri* (drei) und *via* (Weg) zusammen und bedeutet “Ort, wo drei Wege zusammenstoßen = Wegkreuzung = öffentlicher Weg”.
Siehe auch Ende dieses Kapitels.

12 studere, lat. = etwas eifrig betreiben

Mit Hilfe des Additionssatzes lässt sich A nun folgendermaßen berechnen:

$$\int_{-3}^{2} (x^3 + x^2 - 6x)\,dx = \int_{-3}^{0} (x^3 + x^2 - 6x)\,dx + \int_{0}^{2} (x^3 + x^2 - 6x)\,dx$$

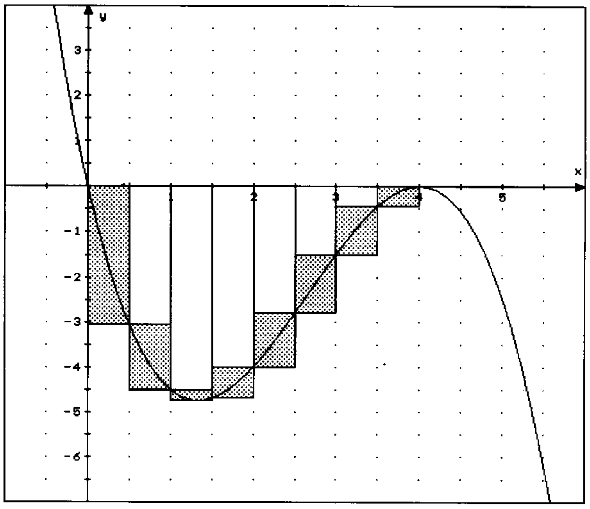
Da $\int_{0}^{2} (x^3 + x^2 - 6x)\,dx$ “nur das falsche Vorzeichen hat”, erhalten wir

$$A = \int_{-3}^{0} (x^3 + x^2 - 6x)\,dx - \int_{0}^{2} (x^3 + x^2 - 6x)\,dx$$

Noch einmal: A ist positiv und $\int_{0}^{2} (x^3 + x^2 - 6x)$ ist negativ.**

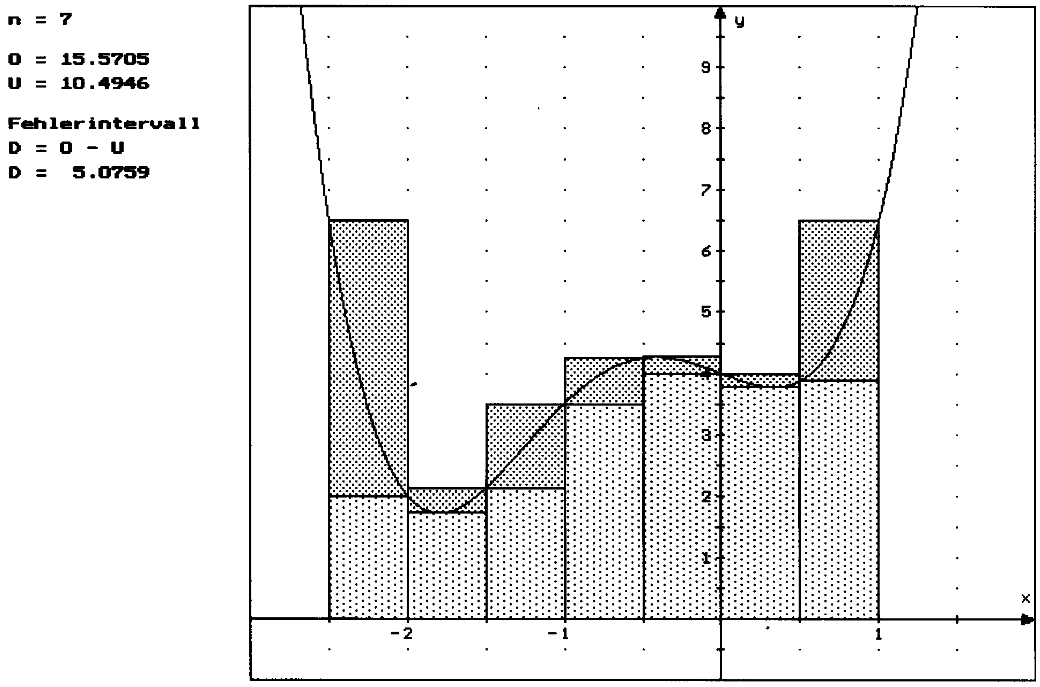
Aufgabe 10: Tabelle und Graph gehören zu $f(x) = -0{,}5x \cdot (x - 4)^2$.

x	f(x)
0	0
0,5	-3,0625
1	-4,5
1,5	-4,6875
2	-4
2,5	-2,8125
3	-1,5
3,5	-0,4375



1. Bestimme den Funktionswert des relativen Minimums von f.
2. Berechne für n = 8 über dem Intervall [0 / 4] unter Benutzung der Tabelle und des Ergebnisses von 1. die zugehörige Untersumme und Obersumme.
3. Vergleiche die Ergebnisse mit der Zeichnung.
4. Gib nun einen Näherungswert für $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$ an.

Aufgabe 11:



Der Graph gehört zu **$f(x) = x^4 + 2{,}5x^3 - x + 4$** .

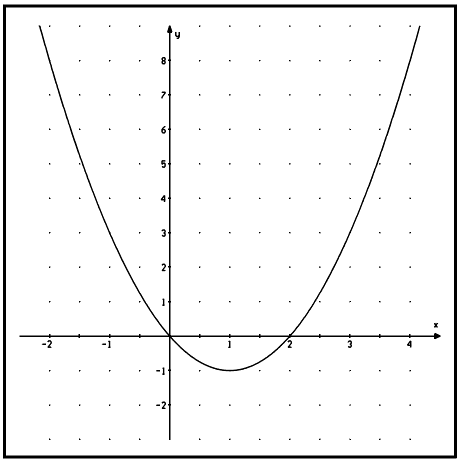
Bestimme aus der Graphik durch Ablesen (Abmessen) die Höhen der einzelnen Rechtecke und berechne dann U_7 und O_7 .

Vergleiche mit den angegebenen Werten und gib einen Näherungswert für $\int_{-2,5}^{1} f(x)dx$ an.

Prinzipiell [13] haben wir einen Weg gefunden, Flächeninhalte beliebig genau zu berechnen, doch wird man meiner Meinung sein, dass dieser Weg sehr rechenintensiv ist. Geht´s nicht etwas schneller? Ja, aber dazu muss noch etwas Gedankenarbeit verrichtet werden!

---

[13] grundsätzlich; principialis, lat. = ursprünglich



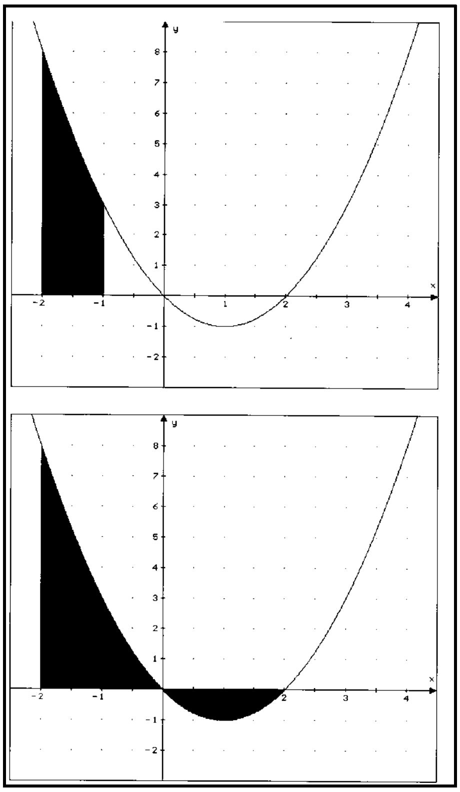
Betrachten wir einmal die durch **f(x) = x² - 2x** definierte Parabel:
Es sollen nun mehrere Integrale zu dieser Funktion f berechnet werden:

$$\int_{-2}^{-1,5} f(x)dx\ ,\quad \int_{-2}^{-1} f(x)dx\ ,\quad \int_{-2}^{-0,5} f(x)dx\ ,\ .....\ ,$$

$$\int_{-2}^{4} f(x)dx\ .$$

Um etwas Zeit zu sparen, habe ich den Computer viele viele Untersummen (es wurde jedes Intervall in 500 Teilintervalle unterteilt) ausrechnen lassen.
Die Ergebnisse findet man in der folgenden Tabelle. Zusätzlich wurden die Untersummen für

$\int_{-2}^{-1} f(x)dx$ und $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ veranschaulicht.



Bevor die Tabelle ausgedruckt wird, soll bitte noch folgendes “Problem” gelöst werden:

Aufgabe 12:
Warum wundert sich die Fachfrau nicht, wenn sie

feststellt, dass sie für die Integrale $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$ und

$\int_{-2}^{2} f(x)dx$ fast dieselben Näherungswerte erhält,

obwohl die erste (schraffierte) Fläche doch einen **wesentlich** kleineren Inhalt hat als die zweite?

Lösung: Der Graphik entnimmt man unmittelbar, dass

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx \approx - \int_{0}^{2} f(x)dx \text{ gilt.}$$

(Die Untersummen über dem Intervall [0/2] sind negativ!)

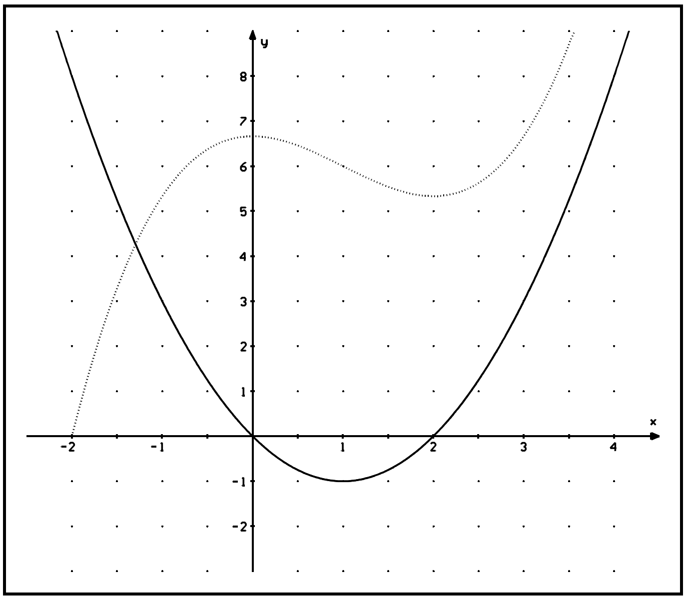
Ich schreibe jetzt, das ist einfacher für mich, $I_{-2}(b)$ statt $\int_{-2}^{b} f(x)dx$:

b	- 2	- 1,5	- 1	- 0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$I_{-2}(b)$	0	3,29	**5,33**	6,36	6,65	6,44	5,97	5,51	**5,29**	5,57	6,60	8,62	11,9

$I_{-2}(-2) = \int_{-2}^{-2} f(x)dx$ habe ich natürlich nicht ausrechnen lassen:

Es gilt, das brauchen wir nicht zu beweisen, selbstverständlich immer

$$\boxed{\int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0}$$



Auf Anweisung hat der Computer für mich noch für wesentlich mehr “bees” die zugehörigen Integrale (natürlich nur Näherungswerte) **berechnet**. Danach habe ich ihm gesagt, dass er alle Werte der obigen Tabelle und die Werte für b = - 1,999; b = - 1,998; b = - 1,997; ... ; b = 3,999 und b = 4 zusätzlich zur Parabel **einzeichnen** soll:

Der Computer hat oben gepunktet den Graphen einer **neuen** Funktion I_{-2} gezeichnet. (Noch “fängt ihr Graph erst bei - 2 an” !!!)

Aufgabe 13: - Warum muss I_{-2} an der Stelle 0 ein relatives Maximum haben?
- Warum muss I_{-2} an der Stelle 2 ein relatives Minimum haben?
- Warum gilt $I_{-2}(1{,}5) \approx I_{-2}(2{,}5)$?

Definition:

Ist das Integral $\int_a^b f(x)dx$ zu berechnen, so nennt man a die **untere Grenze** des Integrals und b heißt **obere Grenze** des Integrals.

Das letzte Beispiel hat gezeigt, dass man ausgehend von der unteren Grenze a = - 2 zur Funktion f ($f(x) = x^2 - 2x$) eine neue Funktion - die zur unteren Grenze - 2 gehörende Integralfunktion von f - gewinnen kann: Für jeden Wert x, den man für die obere Grenze b einsetzt, liefert I_{-2} genau einen Wert $I_{-2}(x)$.

$$\mathbf{I_{-2}(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt}$$

ist die Funktionsgleichung **einer** Integralfunktion von f.

Dem aufmerksamen Leser wird aufgefallen sein, dass hinter dem Integralzeichen die Variable [14] x einen neuen Namen erhalten hat. Da in der obigen Funktionsgleichung x die Bezeichnung für die obere Grenze ist, ist dieser Buchstabe "verbraucht". Ich muss deshalb im Funktionsterm des **Integranden** [15] den Variablennamen ändern. Ich hätte statt t auch z oder u oder ... wählen können, doch hat sich an dieser Stelle in den meisten Büchern das t durchgesetzt. [16]
Ich muss mich wiederholen: Die Integralfunktion I_{-2} ist bis jetzt nur für $x \geq -2$ definiert!! Warum wurde aber oben ("...die Funktionsgleichung **einer** ....") das Wort ´einer´ hervorgehoben?
Die Tabelle auf S. 16 ergab sich durch Berechnung vieler Integrale, die alle dieselbe untere Grenze a = - 2 hatten. Man kann natürlich statt - 2 auch die untere Grenze a = 0 wählen:

---

[14] variare, lat. = verändern, wechseln

[15] Die Funktion, die hinter dem Integralzeichen vor dem "de iks" steht, bezeichnet man als **Integrand**.

[16] In manchen älteren Büchern kann man auch noch die falsche Schreibweise $\int_{-2}^{x} f(x)dx$ finden.

Diese Darstellung ist schlicht unsinnig, da sich die Variable x doch nicht von - 2 bis x (also zu sich selbst) verändern kann.

Es ist völlig gleichgültig, welche untere Grenze a ich mir wähle; nach dem geübten Verfahren lassen sich stets zu einem speziell gewählten a die Werte von

$$I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$$

bestimmen.

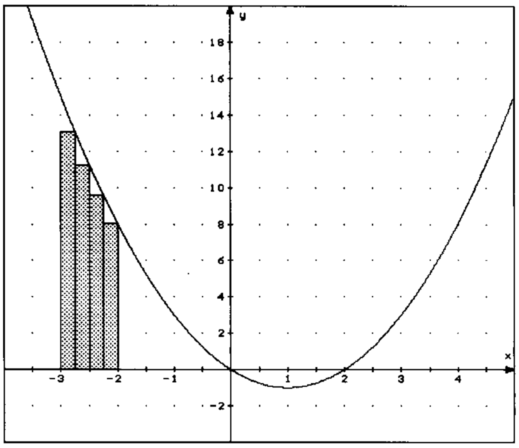
Bevor unterschiedliche Integralfunktionen zu einem vorgegebenen Integranden betrachtet werden, soll aber zuerst geklärt werden, wie $I_{-2}(x)$ auch für $x < -2$ definiert werden kann.

Bei der Berechnung der Untersummen zur näherungsweisen Bestimmung von $\int_a^b f(x)dx$ wurde

stets $a \leq b$ vorausgesetzt und $\Delta x = x_1 - x_o$ (= ...) **war stets positiv**, da $a = x_o < x_1 < ... < x_n = b$ (siehe Seite 7). (Der Wert von Δx war gleich der Breite der einzelnen Rechtecke!)

Ich versuche nun, für b < a das Integral $\int_a^b f(x)dx$ auf dem "inzwischen gewohnten Weg" zu

berechnen. Ausgehend von der Stelle x_o=a muss ich mich dann auf der x-Achse nach links (in Richtung kleinerer x-Werte) bewegen: Um also beispielsweise



$$\int_{-2}^{-3} (x^2 - 2x) \, dx$$

näherungsweise zu berechnen, unterteile ich das Intervall [-3/-2] in vier gleich lange Teilintervalle. Es ergeben sich die Intervallendpunkte (a=) $x_o = -2$; $x_1 = -2{,}25$; $x_2 = -2{,}5$; $x_3 = 2{,}75$ und (b =) $x_4 = -3$.

Noch einmal: Da a = - 2 vereinbarungsgemäß die untere Grenze ist, muss auch dort gestartet werden!!!

Als Wert für die Untersumme U_4 ergibt sich dann:

$$U_4 = f(-2)\cdot(-2{,}25-(-2))+f(-2{,}25)\cdot(-2{,}5-(-2{,}25))+f(-2{,}5)\cdot(-2{,}75-(-2{,}5))+f(-2{,}75)\cdot(-3-(-2{,}75))$$

$$U_4 = (f(-2) + f(-2{,}25) + f(-2{,}5) + f(-2{,}75)) \cdot \mathbf{(- 0{,}25)}$$

U_4 ist negativ!

Wir haben nichts falsch gemacht. (Es wurde "nach Vorschrift" aus jedem Intervall diejenige Stelle gewählt, an der f jeweils den kleinsten Funktionswert hat.)
Es ist offensichtlich, dass sich diese letzte konkrete Rechnung auf analoge[17] Beispiele übertragen lässt. Die Rechtecke, die sich durch die gewählte Zerlegung ergaben, sehen genauso aus wie bei der Berechnung von $\int_{-3}^{-2} (x^2 - 2x)\,dx$. Es gibt nur den Unterschied, dass $\int_{-2}^{-3} (x^2 - 2x)\,dx$ negativ und $\int_{-3}^{-2} (x^2 - 2x)\,dx$ positiv ist. Vom Betrag her haben beide Integrale denselben Wert.

Wir sehen also folgenden Satz ein:

Satz: Für alle stetigen Funktionen, die keine negativen Funktionswerte haben, gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

Dieser Satz gilt natürlich auch, wenn f negative Funktionswerte hat.

Bei der Berechnung der Funktionswerte ist unerheblich, ob "von links nach rechts oder von rechts nach links integriert wird."

Die Änderung der Integrationsrichtung bewirkt lediglich einen Vorzeichenwechsel bei Δx.

---

17 analog = entsprechend, gleichartig; análogos, gr.-lat. = der Vernunft entsprechend

Aufgabe 14: Berechne jeweils einen Näherungswert (U_4) für $\int_{-1}^{-2} (-x^2-1)\,dx$ und $\int_{2}^{1} (-x^2-1)\,dx$ und veranschauliche die Untersummen in einer Zeichnung.

(Bitte einen sinnvollen Maßstab für die x-Achse wählen.)

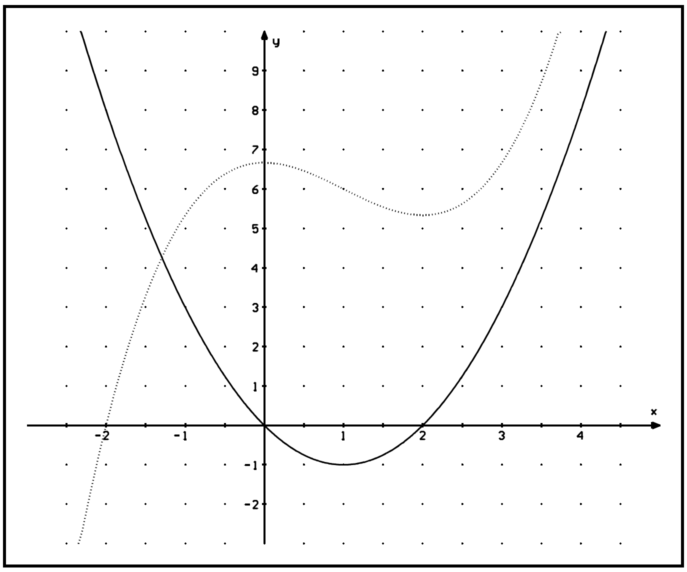
Zusammenfassung:

Durch die Funktionsgleichung

$I_{-2}(x) = \int_{-2}^{x} (t^2 - 2t)dt$ wird jetzt **jedem** $x \in \mathbb{R}$ (also jeder reellen Zahl x) genau eine Zahl aus $\mathbb{R}$ zugeordnet. Es ist unerheblich, ob x größer oder kleiner als - 2 ist. Damit ist eine neue Funktion auf **ganz** $\mathbb{R}$ definiert.

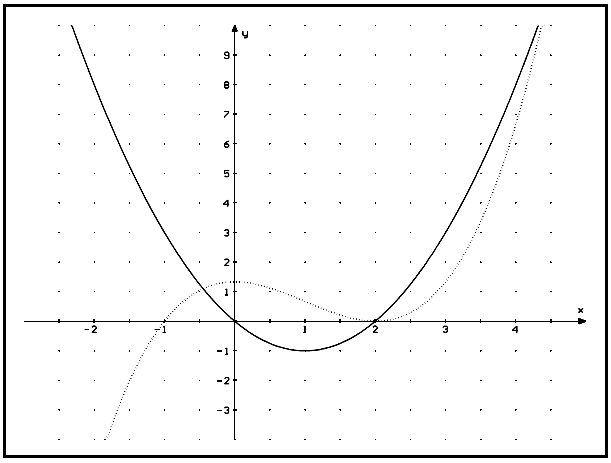
Der vervollständigte Graph von I_{-2} ist unten dargestellt. (Vergleiche bitte auch mit dem Graphen auf S. 16.)

I_{-2} ist die zur unteren Grenze - 2 gehörende Integralfunktion von f.



Es hatte keinen besonderen Grund, sich - 2 als untere Grenze zu wählen: Zu jeder unteren Grenze a kann eine Integralfunktion von f ermittelt werden. Das nächste Bild zeigt den Graphen von f und der zu f gehörenden Integralfunktion I_2.

Aufgabe 15:



- Gib die Funktionsgleichung von I_2 an.
- Warum muss I_2 an der Stelle 2 eine Nullstelle haben?
- Warum muss $I_2(1)$ positiv sein?
- Der Anschauung (dem Verlauf des Graphen der Integralfunktion) entnimmt man, dass $I_2(-1)=0$ gilt. Welche beiden Flächen müssen demnach denselben Inhalt haben?

In den drei folgenden Aufgaben soll die Anschauung zu Rate gezogen werden. (Es wird nicht gerechnet!)

Aufgabe 16: Die Parabel schließt mit der x-Achse im Intervall [0/2] ein Flächenstück ein. Wie lässt sich aus der obigen Graphik der Inhalt dieses Flächenstücks ablesen? Gib nun einen Näherungswert für $\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx$ an.

Aufgabe 17: - Warum ist $\int_0^4 (x^2 - 2x)\,dx$ sicherlich positiv?

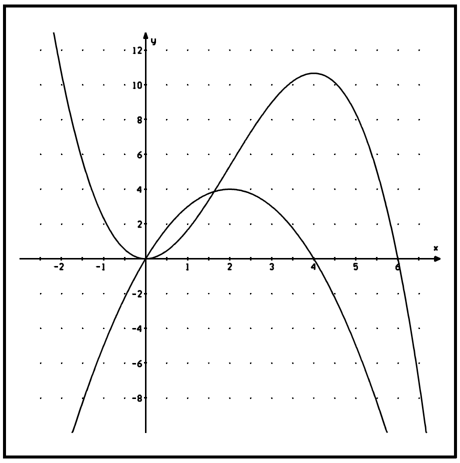
- Ist $\int_0^{2,5} (x^2 - 2x)\,dx$ positiv oder negativ?

- Warum ist $I_0(x)$ für negative x-Werte stets negativ?
- Skizziere den Verlauf des Graphen der Integralfunktion I_0 .
- Was fällt beim Vergleich der Graphen von I_{-2} , I_0 und I_2 auf ?

Aufgabe 18: - Zeichne die durch $f(x) = -x^2 + 4x$ definierte Parabel.

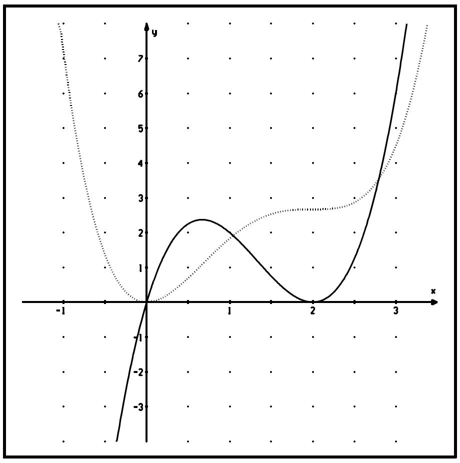
- Gib auf Grund der Zeichnung einen Schätzwert für $\int_0^2 (-x^2+4x)dx$ an.

- Gib nun einen Schätzwert für den Flächeninhalt der Fläche an, den die Parabel mit der x-Achse einschließt.



Links sind der zu $f(x) = -x^2 + 4x$ gehörende Graph und der Graph der Integralfunktion I_0 dargestellt.

Aufgabe 19: Überprüfe die Ergebnisse aus Aufgabe 18 an Hand des Graphen von I_0.
Warum hat I_0 an der Stelle $x = 4$ ein relatives Maximum?
Warum muss I_0 an den Stellen $x=0,5$ und $x = -0,5$ jeweils einen positiven Funktionswert haben?



Auch hier wurde der Graph der Integralfunktion I_0 gezeichnet, die zu der durch $f(x)= 2x \cdot (x-2)^2$ definier-ten Funktion f gehört.
An der Stelle $x = 2$ hat der Graph von I_0 übrigens einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente.
Zur Kontrolle sollte die nächste Aufgabe bearbeitet werden:

Aufgabe 20: Warum kann $\int_0^a 2x\cdot(x-2)^2dx$ für keine obere Grenze a negativ sein?

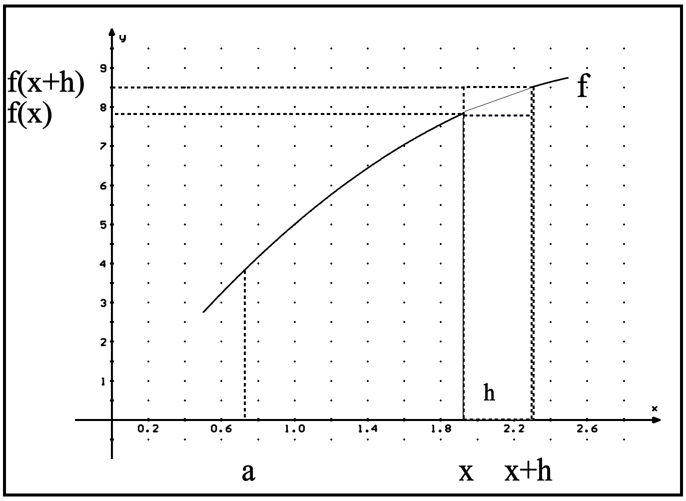
Es wurden bis jetzt mehrere Integralfunktionen zu vorgegebenen Funktionen "ermittelt". (Ausgehend von f wurde untersucht, wie der Graph einer zu f gehörenden Integralfunktion bei vorgegebener unterer Grenze a verlaufen muss.)
Wechseln wir einmal die Blickrichtung und betrachten den Verlauf der letzten Integral-funktion: Ihr Graph hat an den Stellen $x=0$ und $x=2$ waagerechte Tangenten. f hat gerade dort Nullstellen. Die Tangenten an den Graphen von I_0 haben im Intervall [-1/-0,5] (natürlich nicht nur dort) nur negative Steigungen. f hat in diesem Bereich nur negative Funktionswerte. Untersuchen wir nun in den anderen Beispielen die Steigungen der Integralfunktionen und des zugehörigen Integranden f, **stellen wir fest, dass in allen Fällen die Steigung von I_0 an einer beliebigen Stelle x_0 offenbar gleich $f(x_0)$ ist**. (Der Schein kann natürlich trügen, doch dieser offensichtliche Zusammenhang zwischen I_0 und f kann doch kein Zufall sein.)

Vermutung:

Ist f eine auf einem Intervall [a / b] definierte stetige Funktion und I_a eine (beliebige) Integralfunktion von f, so gilt

$$I_a'(x_o) = f(x_o)$$

Wir betrachten der Einfachheit halber eine Funktion f, die streng monoton steigt. Für andere Funktionen gilt der Beweis entsprechend.
Außerdem wählen wir eine beliebige untere Grenze a.



Um $I_a'(x)$ berechnen zu können, muss man sich an die Definition (siehe Ordner Klasse 11) der Ableitung erinnern. Für eine Funktion g gibt z.B. g´(2) die Steigung von g an der Stelle x=2 an. Diese Tangentensteigung wurde näherungsweise durch Sekantensteigungen approximiert [18] . Die Sekantensteigungen berechnet man mit Hilfe von Differenzenquotienten. Ist g eine "nicht zu hässliche" Funktion (alle ganzrationalen Funktionen sind "nicht hässlich") und h eine Zahl, die sich nur wenig von Null unterscheidet [19] , so gilt:

$$g'(x) \approx \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

und $$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Die Ableitung von I_a erhalten wir also über den Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\boxed{\frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h}}$$

Das sieht **sehr** abstrakt [20] aus!! Konkreter [21], anschaulicher, wird dieser Quotient, wenn wir uns die Bedeutung der Terme im Zähler ins Gedächtnis rufen:

---

[18] appropinquatio, lat. = die Annäherung

[19] Gleich Null darf h natürlich nicht sein, weil durch Null nicht dividiert werden darf.

[20] abstrahere, lat. = fortschleppen; abstrakt = vom Dinglichen gelöst

[21] concrescere , lat. = zusammenwachsen

$I_a(x)$ ist nur eine andere (abkürzende) Schreibweise für das Integral $\int_a^x f(t)dt$ und gibt den

Flächeninhalt der Fläche an, die vom Graphen von f, der x-Achse und den beiden Parallelen

zur y-Achse (durch die Punkte (a/0) und (x/0)) begrenzt wird.

$$I_a(x+h) - I_a(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

gibt den Inhalt der Fläche an, die vom Graphen von f, der x-Achse und den beiden Parallelen zur y-Achse durch die Punkte (x / 0) und (x+h / 0) begrenzt wird.

Man erkennt an der Zeichnung, dass dieser Flächeninhalt zwischen dem des großen umbeschriebenen und dem des kleinen einbeschriebenen Rechtecks liegt:

$$h \cdot f(x) \leq I_a(x+h) - I_a(x) \leq h \cdot f(x+h)$$

(Den Flächeninhalt eines Rechtecks bestimmt man durch Länge mal Breite!)

Für positive h erhält man aus dieser Ungleichheitskette unmittelbar:

$$f(x) \leq \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} \leq f(x+h)$$

(Es wurde durch h dividiert und h sollte positiv sein!)

Für "vernünftige" Funktionen gilt:

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$ [22]

Damit ist der Differenzenquotient "**eingesperrt"**! Es muss gelten:

$$\boxed{I_a'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} = f(x)}$$

---

[22] Dies ist für manche Menschen eine Trivialität, doch kann man sich leicht (wirklich!) Beispiele verschaffen, bei denen $\lim_{h \to 0} f(x+h) \neq f(x)$ gilt.

☺

Die bisher geleistete Gedankenarbeit ist wirklich einen Smiley wert!

Aufgabe: Berechne $I_a(x+h) - I_a(x)$, wenn $f(x) = x$ gilt. Fertige eine Skizze an und argumentiere geometrisch.

Wir müssen zwar festhalten, dass an einigen Stellen die Anschauung bemüht wurde, dass wir den "Beweis" nur für eine streng monoton wachsende Funktion geführt haben, oben $h > 0$ vorausgesetzt haben,... aber:

Wir haben Einsicht in einen ganz fundamentalen [23] mathematischen Satz bekommen: Flächeninhaltsbestimmungen haben etwas mit Ableitungen zu tun.

Integration und Differentiation sind eng miteinander verknüpft.

Kurz formuliert: Integralfunktionen haben die schöne Eigenschaft, dass ihre Ableitung (die Variable ist die obere Grenze) gleich dem Integranden ist. Diese Tatsache wird uns die Möglichkeit geben, Flächeninhalte ohne den rechenaufwendigen Weg über Unter- und Obersummen zu bestimmen. Nach einer letzten mathematischen Überlegung wird uns eine nicht zu komplizierte [24] "Formel" zur Verfügung stehen, mit der $\int_0^4 (-x^2 + 4x)\,dx$ exakt (und vor allem schnell) berechnet werden kann.

Definition: F heißt genau dann eine **Stammfunktion** von f , wenn $\mathbf{F' = f}$ gilt. [25]

$$\boxed{\textbf{Integralfunktionen einer Funktion f sind Stammfunktionen von f.}}$$

---

[23] fundare, lat. = den Grund legen

[24] complicare, lat. = zusammenfalten, verwickeln

[25] Ich hoffe, es ist einsichtig geworden, warum die Mathematiker diesen Begriff eingeführt haben.

Auf den Seiten 20/21 wurden zwei verschiedene Integralfunktionen zu ein und derselben Funktion f betrachtet. Die Graphen dieser Integralfunktionen "sehen sich sehr ähnlich": Sie gehen durch Parallelverschiebung in Richtung der y-Achse auseinander hervor.

Aufgabe 21: Wie erhalte ich aus der Funktionsgleichung einer Funktion f diejenige Funktionsgleichung einer Funktion g, deren Graph um drei (Einheiten) gegenüber dem Graphen von f in Richtung der positiven y-Achse verschoben ist? Bestimme näherungsweise eine Gleichung, die den Zusammenhang zwischen $I_{-2}(x)$ und $I_2(x)$ darstellt (siehe S.20/21!).

Satz: Alle zu einer Funktion f gehörenden Integralfunktionen unterscheiden sich nur in einer additiven Konstanten. (Sind also I und J zwei Integralfunktionen von f , so gibt es eine Zahl C mit der Eigenschaft **I(x) = J(x) + C** .)

(Auf den Beweis wird hier verzichtet, obwohl man sich auch im Grundkurs "daran versuchen" kann, weil man den "Unterschied zwischen zwei Integralfunktionen" anschaulich durch Flächeninhalte interpretieren kann.)

Im Leistungskurs wird üblicherweise bewiesen, dass sich **alle Stammfunktionen** einer Funktion f **nur in einer additiven Konstanten unterscheiden**. Wir können das hier aus Zeitgründen nicht leisten. Aber ein Hinweis soll noch hinzugefügt werden: Wir haben gezeigt, dass alle Integralfunktionen von f Stammfunktionen von f sind. Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht. Eine Stammfunktion von f braucht keine Integralfunktion von f zu sein.

Der nächste Satz (der berühmte **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**) wird zeigen, dass die Flächeninhaltsbestimmung mit Hilfe von Stammfunktionen unabhängig davon gelingt, ob eine Stammfunktion von f auch eine Integralfunktion von f ist oder nicht:

Wir werden Integrale mit dem Integranden f leicht berechnen können, wenn wir nur überhaupt eine Stammfunktion von f finden.

Die folgenden Übungen sollen uns den Begriff "Stammfunktion" vertrauter machen, danach geht´s an den Hauptsatz!

Aufgabe 22: Warum ist die durch $F(x) = 0{,}5x^3 - x^2$ definierte Funktion eine Stammfunktion der durch $f(x) = 1{,}5x^2 - 2x$ definierten Funktion f ?
Warum sagt man " F ist **eine** Stammfunktion von f" (und **nicht** "...die...")?

Aufgabe 23: Ist die durch $F(x) = \frac{1}{x}$ definierte Funktion eine Stammfunktion der durch $f(x) = \frac{1}{x^2}$ definierten Funktion?

Aufgabe 24: f sei definiert durch $f(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$.

Gib Funktionsgleichungen für drei Stammfunktionen von f an.

Hier wurden gerade "Vokabeln" aus Klasse 11 abgefragt !

Aufgabe 25: Gib für die durch die folgenden Funktionsgleichungen definierten Funktionen jeweils die Funktionsgleichung **einer** Stammfunktion F an:

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = 0{,}5x^2$; $h(x) = -0{,}25x^4$; $k(x) = \frac{2}{3} x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $g(x) = \frac{1}{x^2}$

c) $f(x) = 3x^2 - x$; $g(x) = -x^2 + 4x$; $h(x) = x^2 - 2x$; $i(x) = -x^2 - 1$

d) $f(x) = x^2 + x - 6$; $g(x) = x^3 - x$; $h(x) = x^4 + 2{,}5x^3 - x + 4$

e) $f(x) = (x - 4)^2$; $g(x) = -0{,}5x \cdot (x - 4)^2$; $h(x) = 2x \cdot (x - 2)^2$

f) $f(x) = -(x - 3)^2 + 1$; $g(x) = 0{,}25 \cdot (x + 2)^2 - 9$

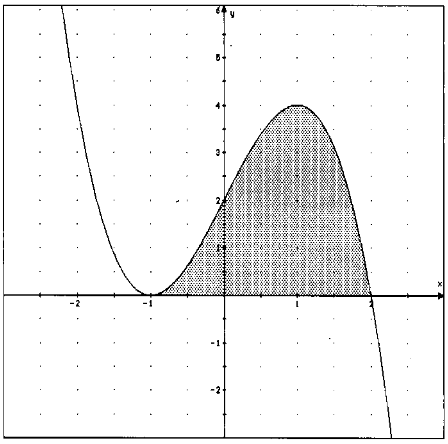
g) $v(t) = a \cdot t$; $F(r) = c \cdot \frac{1}{r^2}$; $F(r) = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$

h) $f(x) = a \cdot (x + 1) \cdot (ax + 1)$; $g(x) = k^2 \cdot x \cdot (x^2 - k)$

Aufgabe 26: Untersuche die Funktionen aus den Aufgaben 25b, c, e, f auf Nullstellen und skizziere die Graphen über einem sinnvoll gewählten Intervall.
Gib bei den Funktionen aus den Aufgaben 25e, f Schätzwerte für den Inhalt der Flächen an, die jeweils von den Graphen mit der x-Achse eingeschlossen werden.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Aufgabe 27: Bestimme den Inhalt der Fläche, die der zu $\mathbf{f(x)= - (x + 1)^2 \cdot (x - 2)}$ gehörende Graph mit der x-Achse einschließt.



Links ist der Graph von f dargestellt. (Zur Übung sollte man die Koordinaten des Hochpunktes berechnen und sein Ergebnis mit der Zeichnung vergleichen.)

Da der Graph von f im Intervall [- 1 / 2] nicht unterhalb der x-Achse verläuft, muss der gesuchte Inhalt gleich

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} \left(-(x+1)^2 \cdot (x-2) \right) dx$$

sein.

Diesen Wert könnten wir angeben, wenn der Verlauf bzw. die Funktionsgleichung der zu f gehörenden Integralfunktion I_{-1} bekannt wäre! Der gesuchte Flächeninhalt ist

$$I_{-1}(2) = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx.$$

Wir kennen die Funktionsgleichung von I_{-1} zwar nicht, doch wir können unser bisheriges Wissen “hervorkramen”:

- **Integralfunktionen einer Funktion f sind Stammfunktionen von f.**
- **Stammfunktionen unterscheiden sich untereinander nur in einer Konstanten, die wir im folgenden C nennen.**

Wir wissen also von I_{-1}, **dass** sie eine Stammfunktion von f ist **und** sich von **irgendeiner** anderen Stammfunktion von f nur in einer additiven Konstante C unterscheidet.

Unter diesen Voraussetzungen wird es sinnvoll sein, eine Stammfunktion von f zu bestimmen:

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x+1)^2 \cdot (x-2) \\ &= -(x^2 + 2x + 1) \cdot (x-2) \\ &= -x^3 + 2x^2 - 2x^2 + 4x - x + 2 \\ &= -x^3 + 3x + 2 \end{aligned}$$

Die Funktion F mit $\mathbf{F(x) = -0{,}25x^4 + 1{,}5x^2 + 2x}$

ist sicherlich eine Stammfunktion von f, kann sich also von I_{-1} nur durch eine (noch zu bestimmende) Konstante C unterscheiden.

Es muss also **für jedes x**

$$\mathbf{I_{-1}(x) = F(x) + C}$$

gelten.
Noch ist uns C nicht bekannt, doch können wir in die obigen Gleichung jedes x einsetzen. Auf den ersten Blick wird man fragen, was das "man kann jedes x einsetzen" bringen soll. An dieser Stelle hilft wieder Vokabelwissen: Auf Seite 16 findet man $\int_a^a f(x)dx = 0$. Da für a irgendeine Zahl eingesetzt werden kann, folgt: $\int_{-1}^{-1} f(x)dx = 0$.

Also gilt

$$\begin{aligned} I_{-1}(-1) &= F(-1) + C \\ 0 &= F(-1) + C \\ C &= -F(-1) \end{aligned}$$

C ist also gleich **-F(-1)** , wobei wir für F eine beliebige Stammfunktion von f wählen können. Setzen wir dies oben in die Funktionsgleichung von I_{-1} ein, erhalten wir

$$I_{-1}(x) = F(x) - F(-1)$$

Damit lässt sich der gesuchte Inhalt berechnen:

$$I_{-1}(2) = F(2) - F(-1)$$

Oder in anderer Schreibweise:

$$\boxed{\int_{-1}^{2} \mathbf{f(x)\,dx = F(2) - F(-1)}}$$

Da für F eine iksbeliebige Stammfunktion von f gewählt werden darf, nehme ich mir natürlich eine besonders einfache: $\mathbf{F(x) = -0{,}25 \cdot x^4 + 1{,}5 \cdot x^2 + 2 \cdot x}$
Nun wird nur noch eingesetzt und sorgfältig gerechnet:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} (-x^3+3x+2)\,dx &= -0{,}25 \cdot 16 + 1{,}5 \cdot 4 + 4 - (-0{,}25 \cdot 1 + 1{,}5 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)) \\ &= -4 + 6 + 4 - (-0{,}25 + 1{,}5 - 2) \\ &= 6{,}75 \end{aligned}$$

Aufgabe 28: Überprüfe an der Graphik auf S.22 , ob das obige Ergebnis (6,75) von der Anschauung her stimmen kann.

Aufgabe 29: Berechne auf demselben Weg wie oben $\int_{-1}^{2} (-x^3+3x+2)\,dx$ unter Benutzung einer anderen Stammfunktion.

Das an einem konkreten Beispiel durchgeführte Verfahren zur Berechnung eines Integrals lässt sich folgendermaßen verallgemeinern:

Es soll für irgendeine (stetige) Funktion f der Wert von $\int_a^b f(x)dx$ berechnet werden.

Lösungsweg:

1. Man bestimmt die Funktionsgleichung einer beliebigen Stammfunktion F des Integranden f.

2. Da sich F und die Integralfunktion I_a von f nur in einer additiven Konstanten C unterscheiden können, gilt wegen $I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$$

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Also:
$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

3. Für x setzt man nur noch die obere Grenze b ein und erhält den sogenannten

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wenn f eine stetige Funktion und F irgendeine Stammfunktion von f ist, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Diese Gleichung schreibt man oft in folgender abkürzender Form:

$$\int f(x)\,dx = [\,F(x)\,]_a^b$$

Beispiel:

Bestimme den Inhalt der Fläche, die der Graph der durch $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 2x$

definierten Funktion mit der x-Achse einschließt.

(Zur Kontrolle: Der Graph von f hat in H(- 1,79/2,74) einen Hochpunkt, in T(1,12/- 1,35) einen Tiefpunkt und in W (- 0,33/0,69) einen Wendepunkt.)

Lösung:
Um den Verlauf des Graphen zu bestimmen, werden die Nullstellen ermittelt. Sie sind die Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 2x = 0$$

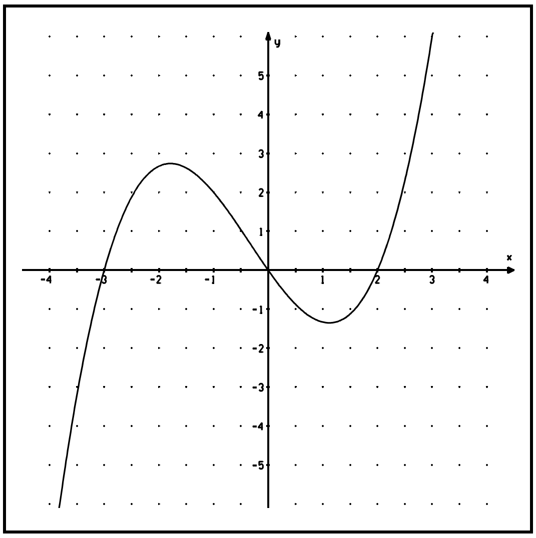
Diese Gleichung ist äquivalent zu $x \cdot (x^2 + x - 6) = 0$.

Die erste Nullstelle erkennt man sofort: $x_{N_1} = 0$

Die weiteren Nullstellen ergeben sich aus $x^2 + x - 6 = 0$

$$x_{N_{2,3}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Aus den bisher gewonnenen (bzw. vorgegebenen) Daten lässt sich der Graph von f skizzieren:



Da f im Intervall [- 3 / 0] keine negativen Funktionswerte hat, ist der Inhalt der Fläche, die der Graph von f in diesem Intervall mit der x-Achse einschließt, gleich

$$\int_{-3}^{0} \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3} x^2 - 2x \right) dx = \left[\frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{9} x^3 - x^2 \right]_{-3}^{0}$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{12} (-3)^4 + \frac{1}{9} (-3)^3 - (-3)^2 \right)$$

$$= -\left(\frac{1}{12} \cdot 81 - \frac{1}{9} \cdot 27 - 9 \right)$$

$$= -\left(\frac{27}{4} - 12 \right)$$

$$= - 6{,}75 + 12$$

$$= 5{,}25$$

Da die Funktionswerte von f im Intervall [0 / 2] nicht positiv sind, gibt $-\int_0^2 f(x)dx$ den Inhalt der Fläche an, den der Graph von f in diesem Intervall mit der x-Achse einschließt:

$$-\int_0^2 f(x)\,dx = -\left[F(x)\right]_0^2$$

$$= -(F(2) - F(0))$$

$$= -\left(\frac{1}{12}\cdot 2^4 + \frac{1}{9}\cdot 2^3 - 2^2 - 0\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{12}\cdot 16 + \frac{1}{9}\cdot 8 - 4\right)$$

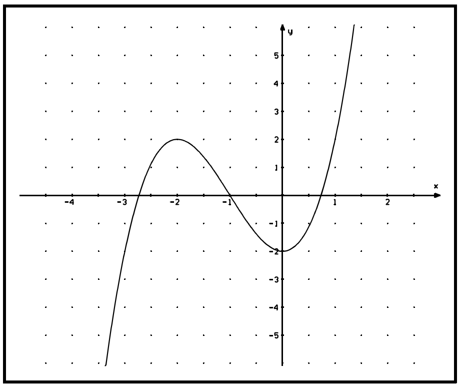
$$= -\left(\frac{4}{3} + \frac{8}{9} - 4\right)$$

$$= \frac{16}{9}$$

Dringender Hinweis: Auf die Minuszeichen achten !!!

Der Gesamtflächeninhalt ist also gleich $5{,}25 + \frac{16}{9} \approx 7{,}03$.

Aufgabe 30 [26] : $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$



Berechne die Nullstellen des Graphen.

(Zur Probe: $x_{N_{1,2}} = -1 \pm \sqrt{3}$)

Bestätige, dass die Funktionswerte von f an der Stelle - 2 ein relatives Maximum haben.

Berechne $\int_{x_{N_1}}^{x_{N_2}} f(x)dx$.

Zeige, dass der Inhalt der Fläche, die der Graph mit der x-Achse einschließt, gleich 4,5 ist.

---

26 Diese Aufgabe brauchen nur Menschen zu lösen, die mit der Polynomdivision nicht auf Kriegsfuß stehen.

Aufgabe 31: Berechne $\int_1^2 (-x^2+6x)\,dx$ und vergleiche mit den Ergebnissen aus der Aufgabe auf den Seiten 4/5.

Aufgabe 32: Berechne $\int_0^1 x^2\,dx$, $\int_0^2 x^2\,dx$ und vergleiche mit den Aufgaben 3/4 auf Seite 5.

Aufgabe 33: Berechne $\int_0^1 (-2x^2+12x-10)dx$ und vergleiche mit dem Näherungswert auf Seite 10 oben.

Aufgabe 34: Berechne $\int_0^1 (-x^3+4x^2)dx$; $\int_1^4 (-x^3+4x^2)dx$ und $\int_0^4 (-x^3+4x^2)dx$. Vergleiche mit Seite 11 .

Aufgabe 35: Es ist $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$. Berechne $\int_{-3}^2 f(x)dx$; $\int_{-3}^0 f(x)dx$ und $\int_0^2 f(x)dx$.

Vergleiche mit S.13 und mit der gerade durchgerechneten Beispielaufgabe.

Aufgabe 36: Berechne $\int_{-2,5}^1 f(x)dx$. (f : Siehe Aufgabe 11.)

Aufgabe 37: Berechne die vier Integrale oben auf S.15 und die beiden Integrale aus A 14.

Aufgabe 38: Berechne die Integrale aus A 17 und das Integral aus A 18.

Aufgabe 39: Gegeben ist f durch $f(x) = 0{,}25\cdot x^3 - x$. Berechne $-2\cdot\int_0^2 f(x)dx$ und begründe, warum dieser Wert gleich dem Inhalt der Fläche ist, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

Aufgabe 40: Gegeben ist f durch f(x) = 0,5x(x+1)(x-3). Skizziere den Graphen in einem sinnvollen Intervall. Berechne $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ und $\int_{-1}^{3} f(x)dx$. Bestimme nun lediglich unter Benutzung dieser beiden Werte den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

Aufgabe 41: Gegeben ist f durch $f(x) = k^2 x^3 - x$. Bestimme k (k>0) so, dass der Inhalt der Fläche, den der Graph von f mit der x-Achse einschließt, gleich 8 ist.

Aufgabe 42: Gegeben ist f durch $f(x) = x^3 - k x^2$. Bestimme k (k>0) so, dass der Inhalt der Fläche, den der Graph von f mit der x-Achse einschließt, gleich $\frac{4}{3}$ ist.

Aufgabe 43: Bestimme den Inhalt A(k) der Fläche, welche über dem Intervall [0/10] zwischen dem Graphen der durch $f_k(x) = \frac{1}{64}(kx - 8)^2$ definierten Funktion f_k und der x-Achse liegt (k>0). Für welches k wird A(k) minimal?

Aufgabe 44: (Bitte zuerst S.37-39 studieren!)
Gegeben sind die Parabel f durch $f(x) = x^2 - 6x + 5$ und die Parabelschar (p_k) durch $p_k(x) = -k^2 \cdot (x-1) \cdot (x-5)$ $(k \neq 0)$.

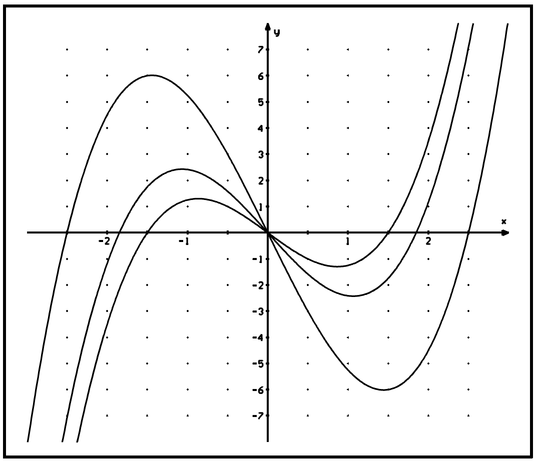
a) Bestimme den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

b) Begründe ohne Rechnung, warum es keine Parabel p_k geben kann, deren Graph mit dem Graphen von f eine Fläche vom Inhalt 10 einschließt?

c) Bestimme den Inhalt der Fläche, den die Graphen von f und p_k einschließen.

d) Bestimme diejenigen k, für die der Graph von f und der Graph von p_k eine Fläche vom Inhalt $\frac{40}{3}$ einschließen. Skizziere die zugehörigen Parabeln.

Aufgabe 45:



In der Graphik sind Ausschnitte von drei Graphen aus der durch

$$\mathbf{f_k(x) = x^3 - k^2 \cdot x \ \ (k>0)}$$

definierten Funktionenschar dargestellt.
Einer der Graphen gehört zum Parameter

$$k = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \quad .$$

Zeige, dass dieser Wert eine Lösung der Gleichung

$$\int_0^1 f_k\,(x)\ dx = \int_1^k f_k\,(x)\ dx \ \text{ ist.}$$

(Hinweis: Es ergibt sich eine biquadratische Gleichung für k, die man mit Hilfe der Substitution $z = k^2$ lösen kann.)
Welche anschauliche Bedeutung hat diese Lösung? [27]

Aufgabe 46: Der Graph einer ganzrationalen Funktion f_k dritten Grades verläuft durch den Ursprung und hat die Nullstellen 1 und 3.

a) Bestimme allgemein $\int_1^3 f_k\,(x)\, dx$.

b) Welche Graphen der Schar (f_k) schließen im Intervall [1/3] mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt 8 ein?

c) Skizziere diese Graphen. (Es darf vorausgesetzt werden, dass diese Graphen an den Stellen $\frac{4}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{7}$ relative Extrempunkte besitzen.)

d) Bestätige, ohne Ableitungen zu berechnen und ohne einen TR zu benutzen, dass grundsätzlich an den Stellen $\frac{4}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{7}$ Extrempunkte liegen können. (Bitte auf einen ordentlichen Text achten. Das ist eigentlich eine Aufgabe für die Klassenstufe 11. **Etwas** Kopfrechnen ist erforderlich.)

---

[27] Recht anspruchsvoll: Begründe, dass auch $k = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ Lösung der Gleichung $\int_0^1 f_k\,(x)\ dx = \int_1^k f_k\,(x)\ dx$ ist **und** deute diese Lösung “anschaulich”.

Aufgabe 47: Gegeben ist die Funktionenschar (f_k) durch $f_k(x) = \frac{1}{k} x^3 + k^2$ **(k>0)**.

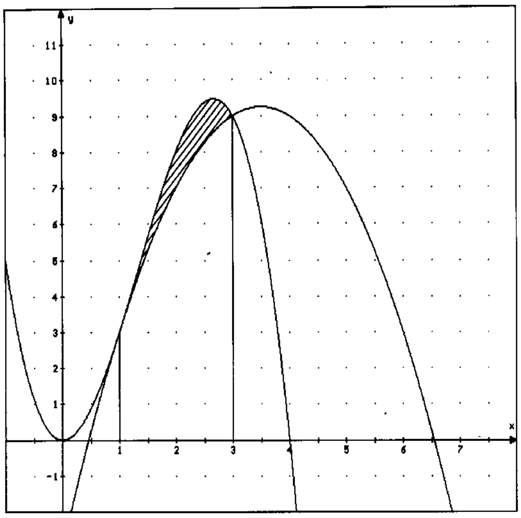
a) Berechne $A(k) = \int_0^1 f_k(x)\,dx$.

b) Berechne A(1) , A(0,5) und A(0,25).
Bestimme die Wendepunkte der Graphen und fertige im Intervall [-1,5/1,5] eine ordentliche Skizze der Graphen von f_1 , $f_{0,5}$ und $f_{0,25}$ an. (Bitte die Funktionswerte an den Rändern des Intervalls berechnen und auf einen sinnvollen Maßstab achten.)

c) Für welches k (k>0) wird A(k) minimal?

Bisher wurden nur Inhalte von Flächen bestimmt, die zwischen einem vorgegebenem Graphen und der x-Achse liegen. Ohne größere Schwierigkeiten lassen sich aber auch Flächeninhaltsbestimmungen durchführen, wenn die Fläche durch zwei ("krumme") Graphen begrenzt wird. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:
Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = -x^2 \cdot (x - 4)$ und $g(x) = -x^2 + 7x - 3$.

Aufgabe 48: Bestätige, dass die Graphen von f und g an der Stelle 1 dieselbe Steigung haben, sich also im Punkt (1/3) berühren.
Bestätige, dass die Graphen genau zwei Punkte gemeinsam haben.
Bestimme den Inhalt A der Fläche, die von den beiden Graphen eingeschlossen wird.

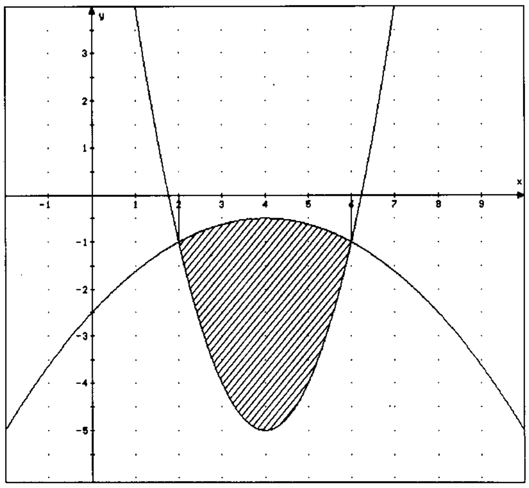


Lösung: $A = \int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x)dx$

$= \frac{44}{3} - \frac{40}{3} \quad (\approx 1{,}33)$

Muss dazu noch eine Erklärung abgegeben werden? Wenn ja: Zuerst noch einmal genau das Bild oben studieren und überlegen, welche Flächeninhalte durch die beiden Integrale bestimmt werden. Wenn die Rechnung dann immer noch nicht einleuchtet, würde ich fragen. (Aber vor dem Fragen bitte zuerst selbst etwas nachdenken.)

Etwas (aber wirklich nur etwas) schwieriger wird es, wenn die beiden Graphen unterhalb der x-Achse liegen: $f(x) = (x - 4)^2 - 5$; $g(x) = - 0{,}125\cdot(x - 4)^2 - 0{,}5$.



Die Schnittstellen der beiden Graphen ergeben sich als Lösungen der Gleichung

$$x^2 - 8x + 11 = - 0{,}125x^2 + x - 2{,}5$$

Also: $$\frac{9}{8}x^2 - 9x + 13{,}5 = 0$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 12}$$

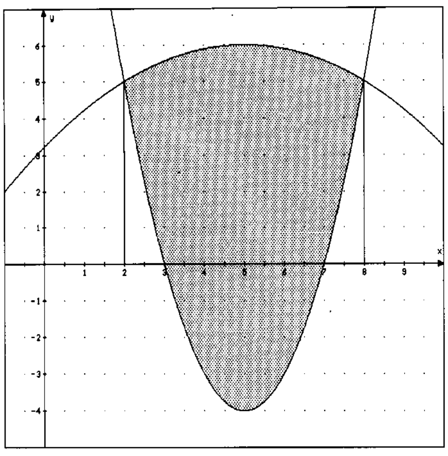
Der Inhalt der Fläche, die die beiden Parabeln einschließen, ist:

$$A = \int_2^6 g(x)dx - \int_2^6 f(x)dx$$

$$= -\frac{8}{3} - \left(-\frac{44}{3}\right)$$

$$= 12$$

In beiden Fällen muss also nur darauf geachtet werden, welcher Graph oberhalb des anderen liegt.



Die links dargestellten Parabeln werden durch die Funktionsgleichungen $f(x) = (x - 5)^2 - 4$ und

$g(x) = -\frac{1}{9}\cdot(x - 5)^2 + 6$ definiert.

Um den Inhalt A der schraffierten Fläche zu berechnen, wird man natürlich wieder zuerst die Schnittstellen x_1 und x_2 der Parabeln bestimmen, um die Integrationsgrenzen zu erhalten.

Aufgabe 49: Warum gilt $A = \int_2^8 g(x)dx - \int_2^8 f(x)dx$?

Lösung: Der Inhalt der oberhalb der x-Achse schraffierten Fläche ist:

$$\int_2^8 g(x)dx - \int_2^3 f(x)dx - \int_7^8 f(x)dx .$$

Am Gesamtinhalt fehlt nun noch $- \int_3^7 f(x)dx$. Es gilt also:

$$\begin{aligned} A &= \int_2^8 g(x)dx - \int_2^3 f(x)dx - \int_7^8 f(x)dx - \int_3^7 f(x)dx \\ &= \int_2^8 g(x)dx - \int_2^3 f(x)dx - \int_3^7 f(x)dx - \int_7^8 f(x)dx \\ &= \int_2^8 g(x)dx - \int_2^8 f(x)dx \quad \text{(wegen der Additivität des Integrals; siehe Seite 11)} \end{aligned}$$

Aus den bisherigen Beispielen ergibt sich folgender

Satz: Ist in einem Intervall [a/b] für zwei (stetige) Funktionen stets $f(x) \geq g(x)$, so gilt für den Flächeninhalt A der Fläche, die zwischen den Graphen von f und g liegt:

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)dx}$$

Anmerkung 1: Dieser Satz gilt unabhängig davon, ob einer oder beide Graphen oberhalb oder unterhalb der x-Achse verlaufen.

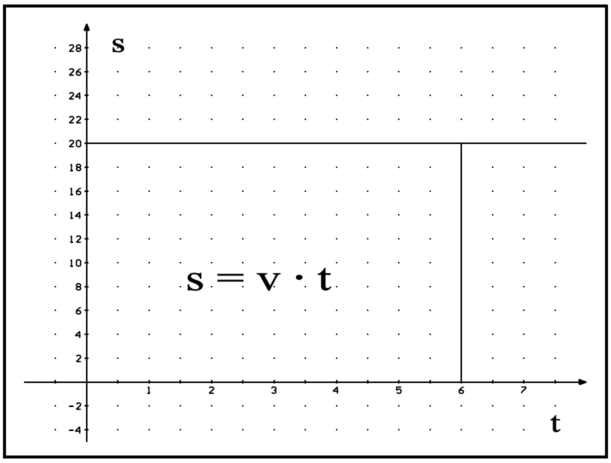
Anmerkung 2: Will man den Inhalt einer Fläche berechnen, die von zwei Graphen eingeschlossen (begrenzt) wird, die sich im Intervall [a/b] mehrfach schneiden, so müssen zuerst alle Schnittstellen der Graphen bestimmt werden. Anschließend muss für jedes Teilintervall, das sich durch die Schnittstellen ergibt, überprüft werden, welcher der Graphen jeweils oberhalb des anderen liegt.

In einem Flugzeug soll ein Gerät eingebaut werden, das die vom Flugzeug in einer bestimmten Zeit zurückgelegte Strecke angibt. Würde das Flugzeug mit konstanter Geschwindigkeit v fliegen, ließe sich der in der Zeit t zurückgelegte Weg s mit Hilfe der Formel $s = v \cdot t$ berechnen:

Bei einer Geschwindigkeit von 20 $\frac{km}{h}$ legt man in sechs Stunden den Weg

$$s = 20\ \frac{km}{h} \cdot 6h$$

$$= 120 \text{ km zurück.}$$



Dieser Wert entspricht gerade dem Inhalt des Rechtecks, das links eingezeichnet ist.

Es rechnet zwar niemand so, aber der zurückgelegte Weg lässt sich auch mit Hilfe der Integralrechnung ermitteln:

$$s = \int_0^6 20\, dt = [\, 20 \cdot t\ ]_0^6 = 20 \cdot 6\ -\ 20 \cdot 0\ .$$

Wenn das Flugzeug konstant mit der Beschleunigung a beschleunigt wird, lässt sich der zurückgelegte Weg auch leicht ermitteln (siehe Physik Klasse 11):

Es gilt $v(t) = a \cdot t$, wenn das Flugzeug zur Zeit t = 0s die Geschwindigkeit $v = 0\ \frac{m}{s}$ hat. Da die Geschwindigkeit in einem kleinen Zeitintervall Δt annähernd konstant ist, legt das Flugzeug in diesem Zeitraum den Weg $v(t) \cdot \Delta t$ zurück. Zerlegt man nun den Zeitraum $[0/t_0]$, in dem die Bewegung betrachtet wird, in ganz viele kleine und gleichgroße Zeitintervalle Δt, erhält man einen guten Näherrungswert für den insgesamt zurückgelegten Weg s, wenn man alle “$v(t) \cdot \Delta t$es” aufsummiert: $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(t_i) \cdot \Delta t$.

Für $v(t_i)$ können wir aber $a \cdot t_i$ einsetzen: $s \approx \sum_{i=1}^{n} a \cdot t_i \cdot \Delta t$.

Bilden wir den Grenzwert (siehe Seite 6), erhalten wir:

$$s = \int_0^{t_0} a \cdot t \cdot dt ;$$

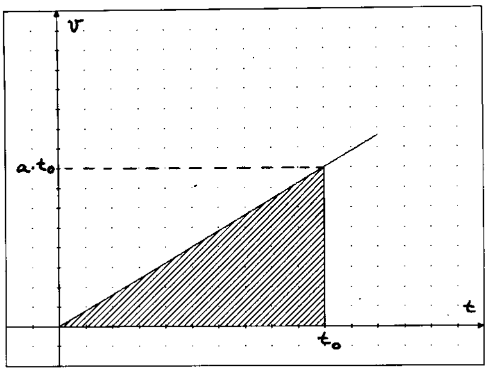
also gilt : $s = \left[\frac{a}{2} \cdot t^2 \right]_0^{t_0}$ bzw. $s = \frac{a}{2} \cdot t_0^2$ (eine bekannte Formel, oder?)

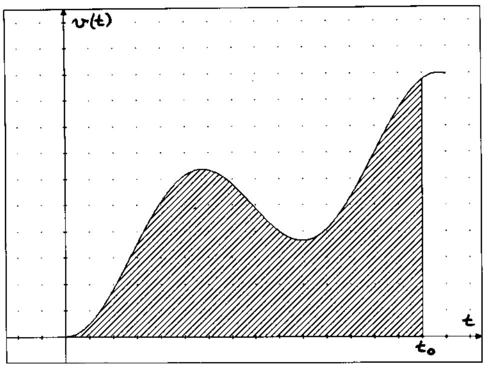
Durch $v = a \cdot t$ wird eine Ursprungsgerade definiert. Der Inhalt der schraffierten Fläche (es ist ein Dreieck!) lässt sich selbstverständlich ohne Integralrechnung ermitteln. Es stärkt aber mein Vertrauen in die Integralrechnung, wenn elementargeometrische Überlegungen zur Flächenberechnung dieselben Ergebnisse liefern.

Die beiden letzten Beispiele haben gezeigt, dass man den zurückgelegten Weg mit Hilfe des Integrals $\int_0^{t_0} v(t)dt$ bestimmen kann. Der Weg lässt sich als Flächeninhalt unter der durch v(t) definierten Geraden interpretieren [28].

Entsprechend lässt sich bei jedem anderen Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz, das durch $v = v(t)$ gegeben ist, der zurückgelegte Weg durch den Inhalt der Fläche unter dem Graphen von v angeben.

$$s = \int_0^{t_0} v(t)\, dt$$ ist der Weg, der im Zeitintervall $[0/t_0]$ zurückgelegt wird.





[28] interpretari, lat. = auslegen, deuten

Als zweites Beispiel soll das sogenannte “Gravitationsintegral” betrachtet werden, das in analoger Form bei der Berechnung der Ionisierungsenergie von Atomen Verwendung findet: Gesucht ist die Energie, die benötigt wird, um einen Körper soweit von der Oberfläche der Erde zu entfernen, dass die Anziehungskraft der Erde auf diesen Körper praktisch vernachlässigt werden kann.[29]
“Arbeit = Kraft mal Weg” oder etwas besser für die Ohren des Physikers:
“Arbeit = Kraft in Richtung des Weges mal zurückgelegtem Weg”:

$$W = F_s \cdot s$$

Diese Formel kann aber nur dann benutzt werden, wenn die Kraft während des gesamten zurückgelegten Weges konstant ist. Soll die Sonde unser Sonnensystem verlassen, ist mit zunehmender Entfernung der Sonde von der Erde immer weniger Kraft nötig, um die Sonde einen weiteren Kilometer von uns wegzubringen. Die aufzubringende Kraft, um die Sonde von uns zum Pluto (und noch viel weiter) fliegen zu lassen, ist alles andere als konstant.
Wenn wir von allen störenden Einflüssen absehen (swing-by etc. sind für uns jetzt Fremdwörter), sagt uns das **Gravitationsgesetz** [30], wie groß die Kraft ist, mit der die Erde (ihre Masse sei M) den Körper (seine Masse sei m) anzieht, wenn sich der Körper in der Entfernung r vom Erdmittelpunkt (Schwerpunkt der Erde) befindet:

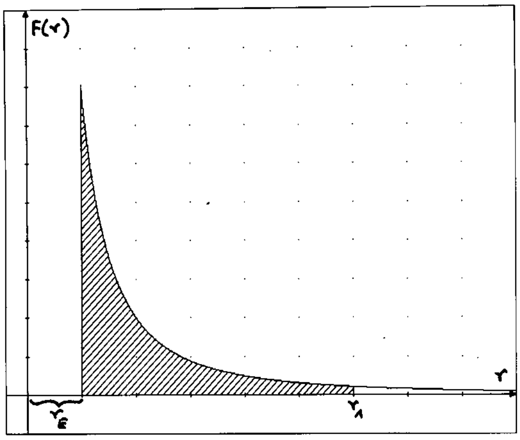
$$F(r) = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Dabei ist γ die sogenannte Gravitationskonstante, deren Größe für unsere Rechnungen keine Rolle spielt (Konstanten sind uns im Gegensatz zu Größen, die sich ändern, beim Integrieren immer willkommen).

---

29 Solche Rechnungen sind immer etwas fiktiv (fictus, lat. = erdichtet, erlogen), da sie nur gelingen, wenn man den Einfluss anderer Körper (Sonne, Mond und Sterne) nicht berücksichtigt.

30 gravitas,lat. = Schwere



Wir stellen uns vor, dass sich die Sonde auf "direktem" Weg vom Erdmittelpunkt entfernt, sich also auf einem Strahl (Anfangspunkt ist der Erdmittelpunkt) von der Erde wegbewegt. An der Erdoberfläche hat m die Entfernung r_E (Erdradius) vom Erdmittelpunkt. m soll nun in die Entfernung r_1 vom Erdmittelpunkt gebracht werden. Um die Arbeit zu berechnen, die dazu notwendig ist, wird das Intervall $[r_E / r_1]$ äquidistant in viele Teilintervalle mit der Länge Δr geteilt. Dann ist die Arbeit $F(r) \cdot \Delta r$ notwendig, wenn m um Δr von der Erde entfernt werden soll. ($F(r) \cdot \Delta r$ ist wieder der Inhalt eines kleinen Rechtecks!)

Die insgesamt zu verrichtende Arbeit, um m von der Erdoberfläche in die Entfernung r_1 vom Erdmittelpunkt zu bringen, ist dann:

$$\int_{r_E}^{r_1} F(r)dr = \int_{r_E}^{r_1} \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} dr$$

$$= \int_{r_E}^{r_1} \gamma \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r^2} dr$$

$$= \left[\gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(-\frac{1}{r} \right) \right]_{r_E}^{r_1}$$

$$= \gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Dieser Wert entspricht dem Inhalt der in der Zeichnung schraffierten Fläche.

Der Graph, die F-Achse und die r-Achse begrenzen eine nach rechts unendlich ausgedehnte Fläche. Dieser Fläche lässt sich ein endlicher Inhalt zuordnen, da

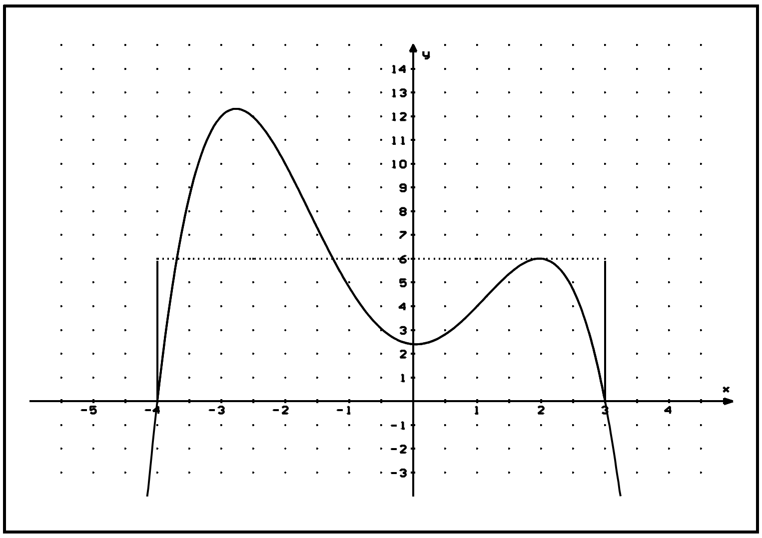
$$\lim_{r_1 \to \infty} \left(\gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_1} \right) \right) = \gamma \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r_E}$$

Dieser Wert gibt die (endliche !) Arbeit an, die notwendig ist, die Masse m "vollständig dem Anziehungsbereich der Erde zu entziehen".

Man wird vielleicht schon festgestellt haben, dass die Berechnung von Integralen **fehlerträchtig** ist: Soll $[F(x)]_a^b$ $(= F(b) - F(a))$ berechnet werden, so ist dies zwar grundsätzlich nicht schwer, doch verursacht das Minuszeichen immer wieder Flüchtigkeits-fehler; und wenn dann noch eine der Integrationsgrenzen negativ ist,....

Am Beispiel der durch $f(x) = -0{,}2(x-3)(x+4)(x^2+1)$ definierten Funktion f (Graph unten) soll gezeigt werden, wie man sich ziemlich einfach Näherungswerte für Integrale verschaffen kann, wenn eine ordentliche Skizze des Graphen vorliegt. Eine deutliche Abweichung des Näherungswerts vom berechneten Integral ist dann ein Hinweis auf einen Rechenfehler.

Der Graph von f und die x-Achse schließen eine Fläche mit dem Inhalt $I = \int_{-4}^{3} f(x)dx$ ein.



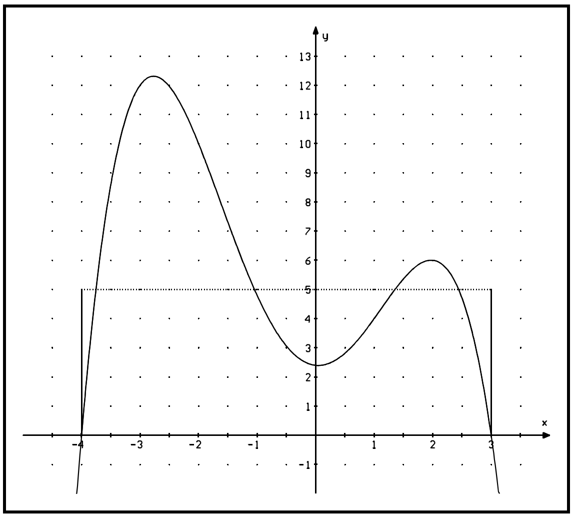
$$I = \int_{-4}^{3} (-0{,}2x^4 - 0{,}2x^3 + 2{,}2x^2 - 0{,}2x + 2{,}4)dx$$

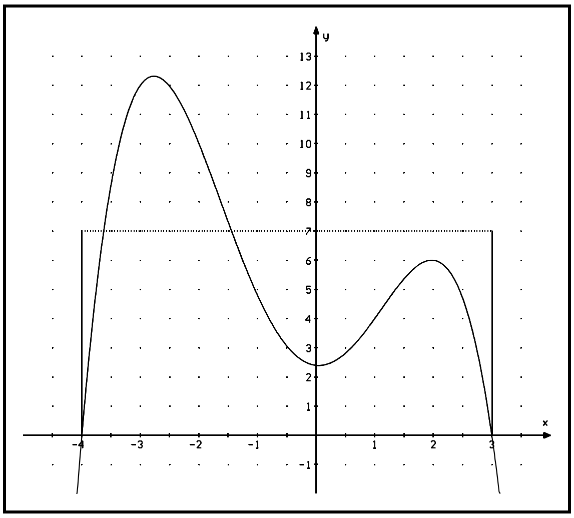
$$= \left[-0{,}04x^5 - 0{,}05x^4 + \frac{11}{15} x^3 - 0{,}1x^2 + 2{,}4x \right]_{-4}^{3}$$

$$\approx 42{,}3$$

Eine derartige Rechnung möchte **ich** nicht durchführen müssen (für mich hat es das Programm "derive" getan) !

Am Graphen auf der vorigen Seite sehe ich aber, dass der Inhalt des zusätzlich einge-zeichneten Rechtecks mit der Höhe 6 und der Breite 7 (A = 42) ziemlich gut mit dem gesuchten Flächeninhalt übereinstimmt. Der "Trick" bestand nur darin, die Höhe eines Rechtecks über dem Intervall [- 4/3] so abzuschätzen, dass "das Stück der Kurve, das über dem Rechteck liegt, sich gegen den Rest ausgleicht". Zwischen dem Extrempunkt links und der x-Achse ist also eine geeignete Parallele einzuzeichnen. Das menschliche Gehirn ist hinsichtlich solcher Abschätzungen offenbar gut ausgestattet, wie alle Erfahrungen zeigen. Man braucht sich nur einmal die Bilder anzusehen, die sich ergeben, wenn man die Parallele in der Höhe 5 bzw. in der Höhe 7 einzeichnet. In beiden Fällen wird man **sofort** sagen: "Nee, ist viel zu viel", bzw. "...ist viel zu wenig".
Der gesuchte Inhalt liegt also ganz offensichtlich zwischen 5 · 7 und 7 · 7 .
Ich würde bei dieser Aufgabe meine Integration sofort überprüfen, wenn das Ergebnis nicht zwischen 35 und 49 liegt. (Wenn man in einer Prüfung keine Zeit mehr für diese Rechnung hat, gibt man an, welches ungefähre Ergebnis man erwartet hätte.)





Diesem eben demonstrierten Abschätzverfahren liegt der sogenannte

Mittelwertsatz der Integralrechnung:

f sei eine auf dem Intervall [a / b] stetige Funktion. Dann gilt:

1. Unter den Funktionswerten f(x) ($x \in [a/b]$) gibt es ein Maximum $f(x_{MAX})$ und ein Minimum $f(x_{MIN})$.

2. Es gibt eine Zahl m zwischen x_{MIN} und x_{MAX}, für die $m \cdot (b - a) = \int_a^b f(x)dx$ gilt.

zu Grunde.

Auf einen Beweis müssen wir hier verzichten, doch empfehle ich das Verfahren zur Rechenkontrolle, weil es nicht zeitaufwendig ist und auf grobe Fehler aufmerksam machen kann.

Aufgabe 50: Gegeben ist f durch $f(x) = 0{,}2x^3 - 3x$

a) Bestimme die Nullstellen und die relativen Extrema exakt.

b) Fertige eine Skizze des Graphen im Intervall [- 4,5 / 4,5] an.

c) Schätze unter Benutzung des Mittelwertes der Integralrechnung den Inhalt der Fläche ab, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

Lösungen:

Die Nullstellen ergeben sich als Lösungen der Gleichung

$0{,}2x^3 - 3x = 0$

$x \cdot (0{,}2x^2 - 3) = 0$

$x_{N1} = 0$;

$0{,}2x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 15$

$x_{N2,3} = \pm \sqrt{15}$

$x_{N2,3} \approx \pm 3{,}87$ (oder gerundet $\pm$ 3,9)

Bestimmung der relativen Extrema:
Es gilt $f'(x) = 0,6x^2 - 3$ und $f''(x) = 1,2x$
Die Stellen waagerechter Tangenten ergeben sich als Lösungen der Gleichung
$0,6x^2 - 3 = 0$
$x^2 = 5$
$x_{E1,2} = \pm\sqrt{5}$ $(\approx \pm 2,24)$

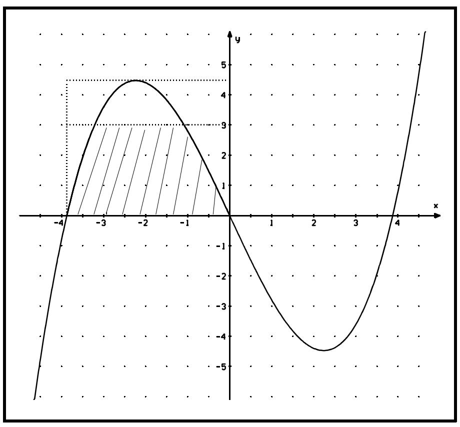
Da $f'(\sqrt{5}) = 0$ **und** $f''(\sqrt{5}) = 1,2 \cdot \sqrt{5}$ $(1,2 \cdot \sqrt{5} > 0)$, haben die Funktionswerte von f an der Stelle $\sqrt{5}$ ein relatives Minimum. Da der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist, müssen die Funktionswerte an der Stelle $-\sqrt{5}$ ein relatives Maximum haben.

$$\begin{aligned} f(\sqrt{5}) &= 0,2 \cdot (\sqrt{5})^3 - 3 \cdot \sqrt{5} \\ &= 0,2 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} - 3 \cdot \sqrt{5} \\ &= \sqrt{5} - 3 \cdot \sqrt{5} \\ &= -2 \cdot \sqrt{5} \quad (\approx -4,48) \end{aligned}$$

Aus der Punktsymmetrie des Graphen folgt $f(-\sqrt{5}) = 2 \cdot \sqrt{5}$.

Schätzung des Flächeninhalts:
“Man muss so viel von der Spitze abschneiden, dass die abgeschnittene Fläche ungefähr denselben Inhalt hat wie der Flächeninhalt der beiden Stücke, um die das untere Rechteck größer ist als die schraffierte Fläche”. Es gilt also (man **sieht** am linken Graphen, dass man die Parallele zur x-Achse eigentlich etwas tiefer als beim Wert 3 zeichnen müsste!):

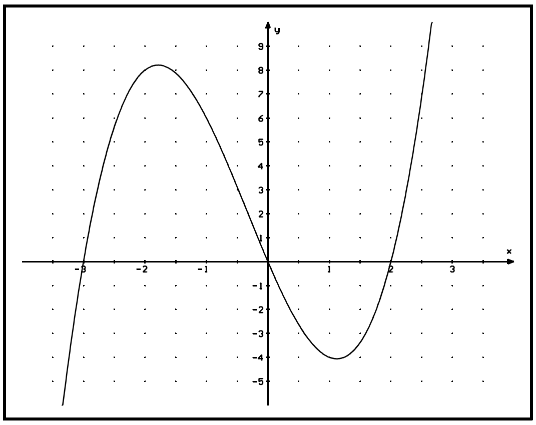
$$\int_{-\sqrt{15}}^{0} f(x)\,dx \approx 3 \cdot \sqrt{15} \quad (\approx 11,6)\text{. Exakt: } 11,25\text{.}$$



Beispiel einer (tatsächlich durchgeführten) Grundkurs ma-1 Mathematikklausur

Aufgabe 1: Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$.

a) Berechne die Nullstellen von f.



Ohne Nachweis darf im Weiteren davon ausgegangen werden, dass der links eingezeichnete Graph der Graph von f ist.

b) Gib unter Benutzung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung einen Schätzwert für den Inhalt der Fläche an, die der Graph von f im zweiten Quadranten mit der x-Achse einschließt. (Es muss ersichtlich sein, wie dieser Schätzwert ermittelt wurde!)

c) Berechne $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$ und $\int_{-3}^{2} f(x)dx$.

d) Bestimme lediglich unter Verwendung der bisher ermittelten Daten den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt. (Der Gedankengang ist zu erläutern.)

Aufgabe 2:
Bestimme folgende Integrale:

a) $\int_{1}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ b) $\int_{r_1}^{r_2} f \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}\,dr$ c) $\int_{0}^{t_o} a \cdot t\,dt$ d) $\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} (x^3 - 0{,}24x)\,dx$

Aufgabe 3: Gegeben ist eine Schar von Funktionen durch $f_a(x) = -\frac{4}{a^3} \cdot x^2 + \frac{8}{a^2} \cdot x$; $(a > 0)$.

a) Berechne $\int_{0}^{2 \cdot a} f_a(x)\,dx$.

b) Ermittle die Nullstellen der Funktionen und erläutere, was das Ergebnis aus Aufgabenteil 3a) anschaulich bedeutet.

Aufgabe 4:

Gegeben sind die Parabel f durch $f(x) = -0{,}25 \cdot (x-2)^2 + 1$ und eine Schar (g_k) von Parabeln durch $g_k(x) = k \cdot (x-2)^2 - 4k$ $(k \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$.

a) Skizziere f und g_1 im selben Koordinatensystem.
(Berechne zuerst die Nullstellen von f und g_k.)

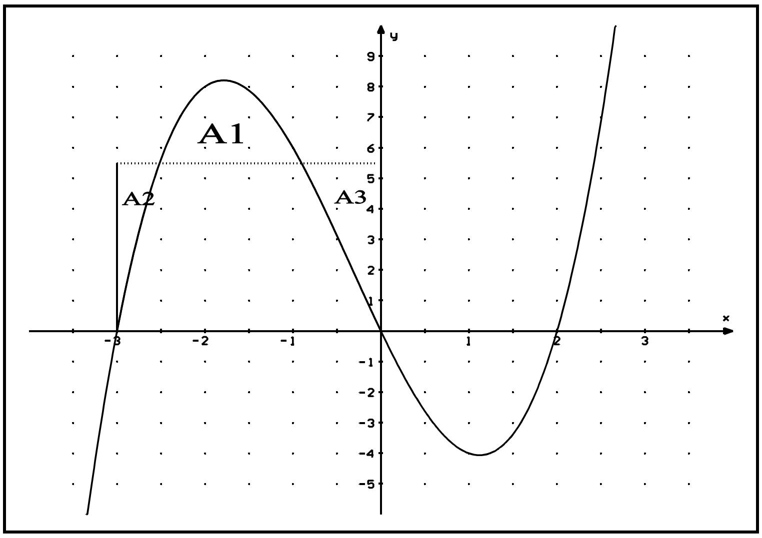
b) Bestimme den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

c) Für welches k (**k > 0**) schließt der Graph von f mit dem Graphen von g_k eine Fläche vom Inhalt $A(k) = 8$ ein? Begründe ohne Rechnung (ggf. Skizze anfertigen), dass es zwei Werte $k \in \mathbb{R}$ gibt, für die der Graph von f und der Graph von g_k eine Fläche vom Inhalt 8 einschließen.

d) Wie verändert sich A(k) für $k \to 0$ $(k>0)$? (Es soll hier nicht gerechnet werden. Ich erwarte eine textliche Beschreibung unter Berücksichtigung des Verlaufs des Graphen von g_k für $k \to 0$.)

Gib nun ohne weitere Begründungen $\lim\limits_{k \to 0} A(k)$ an.

Die Lösungen:



a) Siehe Seite 31/32!

b)

Da die Fläche A1 ungefähr denselben Inhalt hat wie die Flächen A2 und A3 zusammen, gilt: $\int_{-3}^{0} f(x)dx \approx 3 \cdot 5{,}5$

$= 16{,}5$

c) $\int_{-3}^{0} f(x)dx = [\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-3x^2]_{-3}^{0}$

$$[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-3x^2]_{-3}^{0} = 0 - \left(\frac{(-3)^4}{4} + \frac{(-3)^3}{3} - 3 \cdot (-3)^2\right)$$

$$= - \left(\frac{81}{4} - 9 - 27\right)$$

$$= - (20{,}25 - 36)$$

$$= \quad 15{,}75$$

(Dieser Wert ist mit dem Schätzwert verträglich.)

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx \quad = [\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3x^2]_{-3}^{2}$$

$$= \frac{16}{4} + \frac{8}{3} - 3 \cdot 4 - (- 15{,}75)$$

(Das wurde teilweise schon berechnet!!!)

$$\approx 10{,}42$$

d)

Da der Graph von f im Intervall [0/2] nicht oberhalb der x-Achse liegt, muss $\int_{0}^{2} f(x)dx$ negativ sein.

Es gilt wegen der Additivität des Integrals: $\int_{-3}^{2} f(x)dx = \int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx.$

Daraus folgt: $\int_0^2 f(x)dx \approx 10{,}42 - 15{,}75 \quad (= - 5{,}33)$.

Der gesuchte Inhalt ist gleich $\int_{-3}^{0} f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx \approx 15{,}75 - (-5{,}33)$

$= 21{,}08$.

Aufgabe 2: **(eine reine Fleißaufgabe; im Kurs wurden die entsprechenden Integrale behandelt)**

a) $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \left[2 \cdot \sqrt{x} \right]_1^9$

$= 4$

b) $\int_{r_1}^{r_2} f \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}\, dr = - f \cdot m \cdot M \cdot \left[\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2}$

= .... (siehe Seite 43)

c) $\int_0^{t_o} a \cdot t\, dt$ = ... (siehe Seite 41)

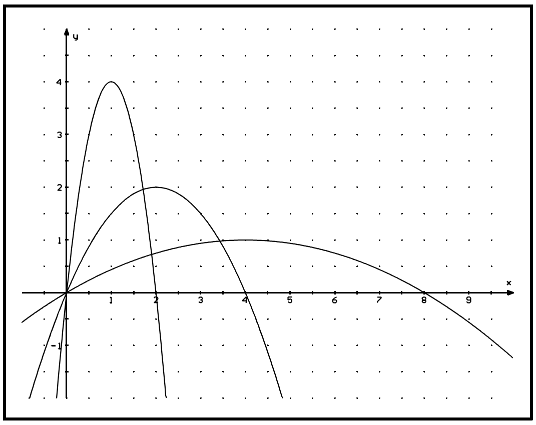
d) $\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} (x^3 - 0{,}24 \cdot x)\, dx = 0$, da der zum Integranden gehörende Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Aufgabe 3: **(auch diese Aufgabe wurde im Unterricht behandelt)**

$$\int_0^{2 \cdot a} \left(- \frac{4}{a^3} x^2 + \frac{8}{a^2} x \right) dx = \left[- \frac{4x^3}{3a^3} + \frac{4x^2}{a^2} \right]_0^{2a}$$

$$= - \frac{32a^3}{3a^3} + \frac{16a^2}{a^2} - 0$$

$$= \frac{16}{3}$$



Alle Parabeln gehen durch den Ursprung und haben zusätzlich an der Stelle 2a eine Nullstelle.
Das Integral gibt den Inhalt der Flächen an, die die Parabeln mit der x-Achse einschließen. Dieser Inhalt ist unabhängig von a, d.h. für alle Parabeln gleich. (Alle Parabeln schließen mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt $\frac{16}{3}$ ein.)

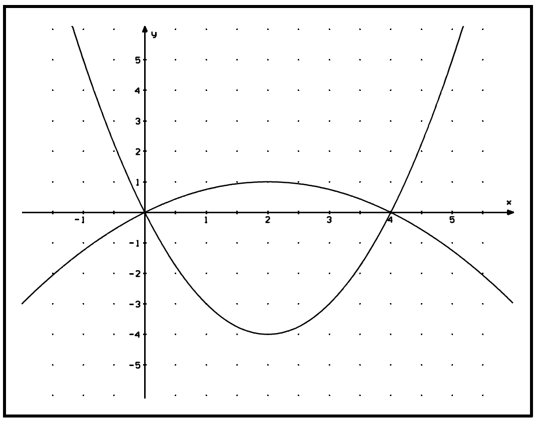
Aufgabe 4a:
Der Graph von f ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel S_f (2 / 1).
$g_1(x) = (x - 2)^2 - 4$. Der Graph von g_1 ist also eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel S_{g1} (2 / - 4) .

Die Nullstellen ergeben sich als Lösungen der Gleichungen
$- 0{,}25 (x - 2)^2 + 1 = 0 \mid \cdot (- 4)$
$(x - 2)^2 - 4 = 0$
$x^2 - 4x = 0$
$x_{N1} = 0 \; ; \; x_{N2} = 4$

bzw. $k \cdot (x - 2)^2 - 4k = 0 \mid : k$ (es wurde $k \neq 0$ vorausgesetzt!)
$(x - 2)^2 - 4 = 0$
Alle g_k haben also dieselben Nullstellen wie f.

4b) $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 (- 0{,}25x^2 + x - 1 + 1)dx$

$$= \left[- \frac{1}{12} x^3 + 0{,}5x^2 \right]_0^4$$
$$= - \frac{64}{12} + 8$$
$$= - \frac{16}{3} + \frac{24}{3}$$
$$= \frac{8}{3}$$



4c:
Da k>0 gelten soll, sind die zugehörigen Parabeln alle nach oben geöffnet. Da die Graphen von g_k im Intervall [0/4] dann nicht oberhalb der x-Achse liegen, muss

A(k) = $\int_0^4 f(x)dx - \int_0^4 g_k(x)dx$ gelten. Da k gesucht ist, so dass A(k) = 8 gilt, ergibt sich

k aus: $\int_0^4 f(x)dx - \int_0^4 g_k(x)dx = 8$

$$\frac{8}{3} - \left[\frac{k}{3} \cdot x^3 - 2k \cdot x^2\right]_0^4 = 8$$

$$\left[\frac{k}{3} \cdot x^3 - 2k \cdot x^2\right]_0^4 = -\frac{16}{3}$$

$$\frac{64\ k}{3} - 32\ k - 0 = -\frac{16}{3}$$

$$\frac{32\ k}{3} = \frac{16}{3}$$

$$k = 0{,}5$$

Wenn k negativ ist, sind die zu g_k gehörenden Parabeln nach unten geöffnet. Liegt nun der Graph von g_k im Intervall [0/4] oberhalb des Graphen von f, so erhält man mit dem Ansatz

$$\int_0^4 g_k(x)dx - \int_0^4 f(x)dx = 8$$

das zweite k.

4d:
Wenn k>0 gilt, ist die zugehörige Parabel nach oben geöffnet, der Scheitel liegt unterhalb der x-Achse im vierten Quadranten. Wenn sich nun k dem Wert Null nähert, wandert der Scheitel auf der Geraden “x=2" auf die x-Achse zu. Der Inhalt der Fläche, die vom Graphen von g_k und der x-Achse eingeschlossen wird, nähert sich dem Wert Null.
Es muss also $\lim\limits_{k \to 0} A(k) = \frac{8}{3}$ gelten.
(Das ist der Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.)

Kommentar zur Klausur:

Die AV-Abitur verlangt eine Aufteilung der Schwierigkeitsbereiche der Aufgabenstellung in drei Anforderungsbereiche (AB): Leichte (rein reproduktive) [31] Anteile) sollen ca. 40% der Arbeit ausmachen, 50% des Klausuranteil sollen “Reorganisation” [32] sein. Unter Reorganisation ist hier zu verstehen, dass Gelerntes in größerem Zusammenhang dargestellt werden kann. 10% der Klausur sollen “Transfer” [33] sein (“die Einser-Frage”).
Natürlich ist die Einordnung einer Fragestellung in einen Anforderungsbereich immer vom Unterricht abhängig, der vorher erteilt wurde: Es kommt darauf an, **was** und **wie intensiv**[34] bestimmte Inhalte durchgenommen wurden. Insbesondere der Transferteil muss mit viel Bedacht ausgewählt werden. Ich sage dazu: “Der Transferteil muss machbar sein, aber überlegen müssen muss man schon!” Selbstverständlich kann er nicht in einer Problemstellung bestehen, die vorher identisch im Unterricht behandelt wurde oder eine Stunde Knobelarbeit erfordert.
Beispiele, die wohl für jeden Kurs gelten:

AB I : Bestimme den Inhalt der Fläche, die der Graph von f ($f(x) = x^2 - 2x$) mit der x-Achse einschließt.

AB II : Untersuchungen an einer Kurvenschar wird man in der Regel AB II zuordnen.

AB III : Aufgabe 4c: Warum gibt es zwei Werte $k \in \mathbb{R}$.....
Diese Aufgabe setzt natürlich voraus, dass man Parabeln (Klasse 11, vielfache Wiederholung in den vorangegangenen Unterrichtsbeispielen) sicher beherrscht. Ich habe ein ähnliches Problem natürlich nicht vorher im Unterricht behandelt. Man muss nun einfach darauf kommen, “die Parabel umzuklappen”, oder eben nicht, was ja auch kein Beinbruch wäre.

Die Aufgabe 4d ist auch “nicht ganz leicht”, aber für mich kein AB III, da ich voraussetze, dass der Verlauf von Parabeln (auch in Abhängigkeit von einem Parameter k) hinreichend bekannt ist.

Insgesamt ist bei der Beurteilung der Schwierigkeit der Klausur zu berücksichtigen, dass
1. A1 Standard ist
2. die Aufgaben A2a,b,c identisch im Unterricht behandelt wurden (A2d kam in analoger Form mehrfach vor)
3. A3 im Unterricht vollständig besprochen wurde
4. gesagt wurde, dass nichts direkt über Integralfunktionen abgefragt würde.

Aufgabe: Schätze den Notendurchschnitt (in Punkten) in dieser Klausur.

---

[31] producere, lat. = hervorbringen; die lat. Vorsilbe “re-” bedeutet “wieder, zurück”

[32] órganon, gr. = Werkzeug, Körperteil, Instrument

[33] trans, lat. = hinüber; ferre, lat. = tragen, bringen

[34] intensus, lat. = gespannt, aufmerksam

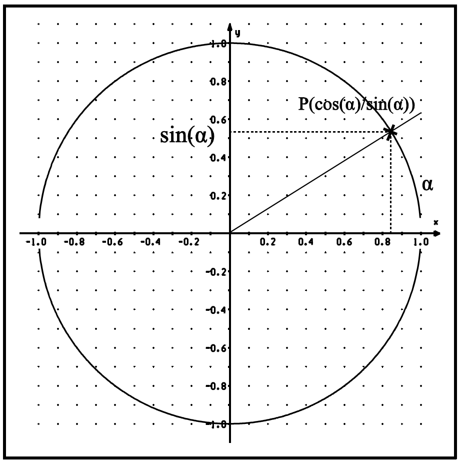
Zwei Mathematiker in einer Bar: Einer sagt zum anderen, daß der Durchschnittsbürger nur wenig Ahnung von Mathematik habe. Der zweite ist damit nicht einverstanden und meint, daß doch ein gewisses Grundwissen vorhanden sei.
Als der erste mal kurz austreten muß, ruft der zweite die blonde Kellnerin, und meint, daß er sie in ein paar Minuten, wenn sein Freund zurück ist, etwas fragen wird, und sie möge doch bitte auf diese Frage mit 'ein Drittel x hoch drei' antworten.
Etwas unsicher bejaht die Kellnerin und wiederholt im Weggehen mehrmals: "Ein Drittel x hoch drei..."
Der Freund kommt zurück und der andere meint: "Ich werd Dir mal zeigen, daß die meisten Menschen doch was von Mathematik verstehen. Ich frag jetzt die blonde Kellnerin da, was das Integral von x zum Quadrat ist." Der zweite lacht bloß und ist einverstanden.
Also wird die Kellnerin gerufen und gefragt, was das Integral von x zum Quadrat sei. Diese antwortet: "Ein Drittel x hoch drei."
Und im Weggehen dreht sie sich nochmal um und meint: "Plus c."

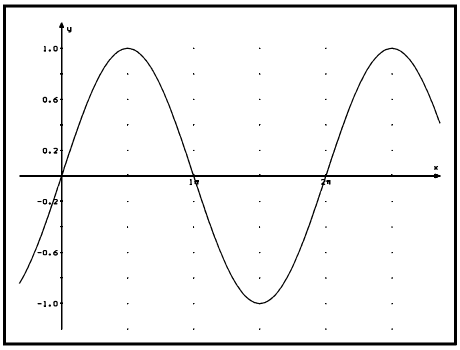
Any student who ever sat or slept trough a mathematics course knows that certain words and phrases occur very frequently. This glossary might eliminate some confusion.

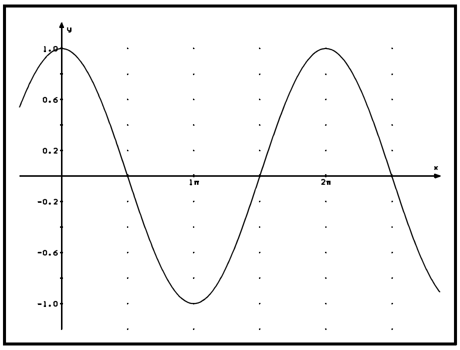
The instructor says	**He really means**
trivial	The student might be able to do it in three hours or so.
simple	An "A" student can do it in a week or so.
easy	This topic would make a good master's thesis.
clear	The instructor can do it (he thinks).
obvious	The instructor is sure it is in his notes somewhere.
certainly	The instructor saw one of his instructors do it, but has completely forgotten how it was done.
left as an exercise for the student	The instructor lost his notes.
is well known	The instructor heard that someone once did it.
can be shown	The instructor thinks it might be true, but has no idea how to prove it.
the diligent student can show	It is an unsolved problem - probably harder than FERMAT's Last Theorem.

Sinusfunktion und Kosinusfunktion

Wechselstrom, Synthesizer, Handy, EKG (Elektrokardiogramm), ...: Begriffe, die zum täglichen Leben gehören.
Alle periodischen[1] Vorgänge wie Schwingungen, Kreisbewegungen, ... hängen "irgendwie" mit der Sinusfunktion zusammen: Die Sinusfunktion ist diejenige Funktion, mit der sich diese Vorgänge mathematisch erfassen, beschreiben lassen.







Zur Erinnerung: Die Punkte auf dem Einheitskreis (r=1) haben die x-Koordinate cos(α) und die y-Koordinate sin(α), wobei die Winkelgröße α im Bogenmaß gemessen wird. Gibt man die Winkelgröße α im Bogenmaß und nicht im Gradmaß an, so ist α gleich der Länge des Bogenstücks auf dem Einheitskreis, das im Punkt (1/0) beginnt und im Punkt P endet.
Ein Winkel, der im Gradmaß 90° groß ist, hat dann im Bogenmaß die Größe $\frac{\pi}{2}$, da der Kreisumfang des Einheitskreises $2 \cdot \pi$ ist.
Den Graphen der Sinusfunktion kann man schnell (und im Prinzip[2] richtig) skizzieren, wenn man die Vokabeln sin(0)=0; $\sin(\frac{\pi}{2})=1$; $\sin(\pi)=0$; $\sin(\frac{3\pi}{2})= -1$; $\sin(2\pi)=0$ kennt und einen sinnvollen Maßstab für die x-Achse wählt.[3]
Die Sinusfunktion ist nicht nur für Winkelgrößen zwischen 0 und 2π definiert. Man kann sich "mehrfach im Kreis drehen" und sich dann überlegen, wie groß $\sin(20{,}25 \cdot \pi)$ ist: Da die Sinusfunktion periodisch ist (nach der Periode 2π wiederholen sich die Funktionswerte identisch),
muss $\sin(20{,}25 \cdot \pi) = \sin(0{,}25 \cdot \pi)$ gelten.
$0{,}25 \cdot \pi$ **entspricht** im Gradmaß der Winkelgröße 45°, also gilt:
$\sin(0{,}25 \cdot \pi) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$.

Der Graph der Kosinusfunktion ergibt sich durch eine Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ aus dem Graphen der Sinusfunktion:

$$\boxed{\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

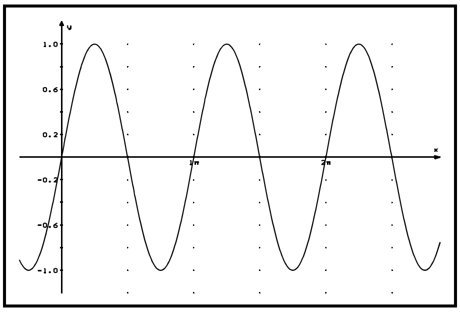
---

1 peri, gr. = um, herum; hodós, gr. = Weg, Gang

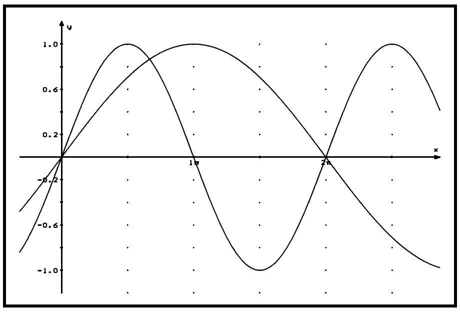
2 principium, lat. = Ursprung, Grundsatz

3 "Sinnvoll" heißt hier: Man teilt die x-Achse in Vielfache von π. Man wird außerdem ausnutzen, dass der Graph der Sinusfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist, dass also für **alle x** ∈ ℝ gilt: - f(- x) = f(x).

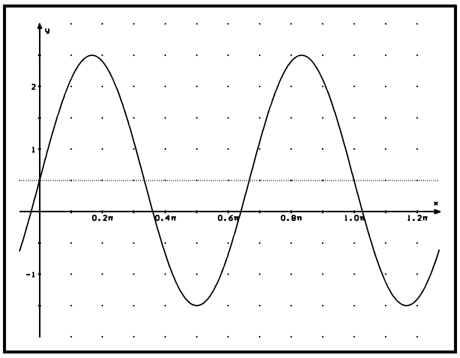
Die Tonhöhe eines Tons wird durch die Frequenz f [4] der ihn erzeugenden Schwingungen bestimmt. Aus der Frequenz lässt sich unmittelbar die Schwingungsdauer T bestimmen. Die Schwingungsdauer T gibt die Zeit an, in der genau eine volle Schwingung vollführt wird. (Übrigens spricht man in der Musik dann von einem Ton, wenn die Schwingung, die diesen Ton erzeugt, eine reine Sinusschwingung ist. Klänge entstehen durch Überlagerung (Superposition) von verschiedenen Sinusschwingungen.) Der Schwingungsdauer T entspricht in mathematischer Sprechweise die Länge des Intervalls, nach der sich der Verlauf des Graphen der Sinusfunktion identisch wiederholt. Betrachten wir dazu zwei weitere Beispiele:
(Für f(x) = sin(x) ist schon bekannt, dass die Periode 2π beträgt.)



Der Graph der durch **g(x)=sin(2x)** definierten Funktion "absolviert" [5] im Intervall [0/2π] zwei volle Schwingungen.
Die Periode dieser Funktion g ist also π (≈3,14) und im Intervall [0/2π] oszilliert [6] der Graph zwei Mal hin und her.
Im nächsten Bild ist der Graph der durch **h(x)=sin(0,5x)** definierten Funktion zusammen mit dem Graphen der Sinusfunktion dargestellt. Der Graph der Funktion h vollführt im Intervall [0/2π] lediglich eine halbe Schwingung. (4π ist die Periode von h.)



Alle durch **f $_k$(x)=sin(k·x)** definierten Funktionen haben Funktionswerte, die nicht größer als 1 und nicht kleiner als - 1 sind. (Die Amplitude [7] hat jeweils den Wert Eins.)
Man kann die Amplituden durch einen Faktor A verändern. "f(t) = A · sin(ωt)" hat die Amplitude A.



Durch eine additive Konstante lässt sich der Graph in Richtung der y-Achse verschieben. Die horizontal verlaufende (gestrichelte) Gerade deutet an, um wieviel Einheiten der Graph verschoben wurde.

Aufgabe 51:
Wie lautet die Funktionsgleichung zum neben dargestellten Graphen, dessen Amplitude und Frequenz ganzzahlig sind?

Aufgabe 52:
Skizziere den zu "f(x) = - 3 · cos(0,5x) + 2 " gehörenden Graphen im Intervall [- 4 / 10].

4 frequentia, lat. = Häufigkeit

5 absolvere, lat. = loslösen, vollenden

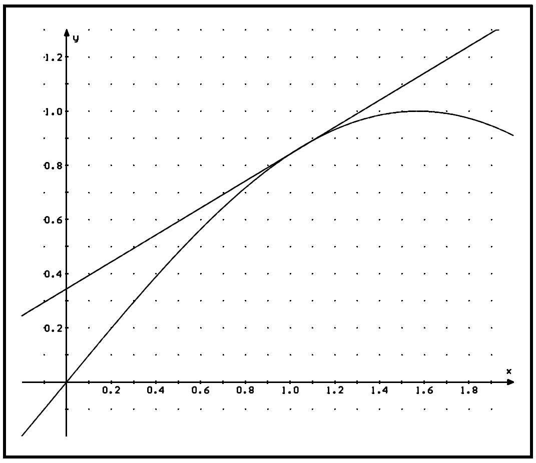
6 oscillatio, lat. = das Schaukeln

7 amplitudo, lat. = Weite, Größe

In vielen physikalischen Anwendungen (z.B. bei der Erzeugung von Wechselstrom) wird die Ableitung der Sinus- bzw. der Kosinusfunktion benötigt:
In Klasse 11 hat man gelernt, dass man die Momentangeschwindigkeit eines Körpers näherungsweise aus $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ erhält, wenn Δt nur wenig von Null verschieden ist. Der Bruch $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ist -mathematisch betrachtet- nichts anderes als ein Differenzenquotient. Ist die Änderung Δs in einer kleinen Zeitspanne Δt groß, so heißt dies, dass der Körper zu dem betrachteten Zeitpunkt eine große Momentangeschwindigkeit hat. Den exakten Wert für die Momentangeschwindigkeit erhält man durch $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$. [8]
Betrachtet man den Weg in Abhängigkeit von der Zeit (die Physiker benutzen dann gerne die Funktionsgleichung s=s(t)), so gilt $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$.
Ändert sich eine Spannung U = U(t) mit der Zeit, ist es in Anwendungssituationen oft wichtig zu wissen, mit welcher "Geschwindigkeit" sich die Spannung ändert, d.h. man möchte $U'(t)$ [9] kennen. Da in vielen Fällen "sinusförmige" Wechselspannungen betrachtet werden, ist hoffentlich plausibel, warum sich die Mathematiker/Physiker/Ingenieure ... für die Ableitung der Sinusfunktion interessieren.
Betrachten wir also die Funktion **f** mit der Funktionsgleichung **f(x)=sin(x)**. Wir können zwar bisher keine bekannte Formel anwenden, um $f'(x)$ anzugeben, doch ist eine näherungsweise Bestimmung mit Hilfe des Differenzenquotienten möglich.

Aufgabe 53: Bestimme näherungsweise (h=0,1) die Steigung des Graphen der Sinusfunktion an der Stelle $x_o = 1$.

Lösung:
Zuerst muss dem **TR** gesagt werden, dass er nicht im Gradmaß, sondern **im Bogenmaß** zu rechnen hat!!! Es ist also der MODUS **RAD** einzustellen. Anderenfalls erhält man für sin(1) nicht den korrekten Näherungswert 0,8415, sondern den falschen Wert 0,0175, der der Näherungswert für sin(1°) ist. Links ist die Sekante eingezeichnet worden, die durch die Punkte (1/sin(1)) und (1,1/sin(1,1)) verläuft. Die Steigung dieser Sekanten ist ungefähr gleich $\frac{0,8912 - 0,8415}{0,1}$ ($\approx$ 0,4974).



Hinweis: Berechnet man den Bruch mit dem TR, muss beachtet werden, dass der TR automatisch "Punkt vor Strich" rechnet. Also das Klammersetzen nicht vergessen!

---

8 velocitas, lat. = Geschwindigkeit

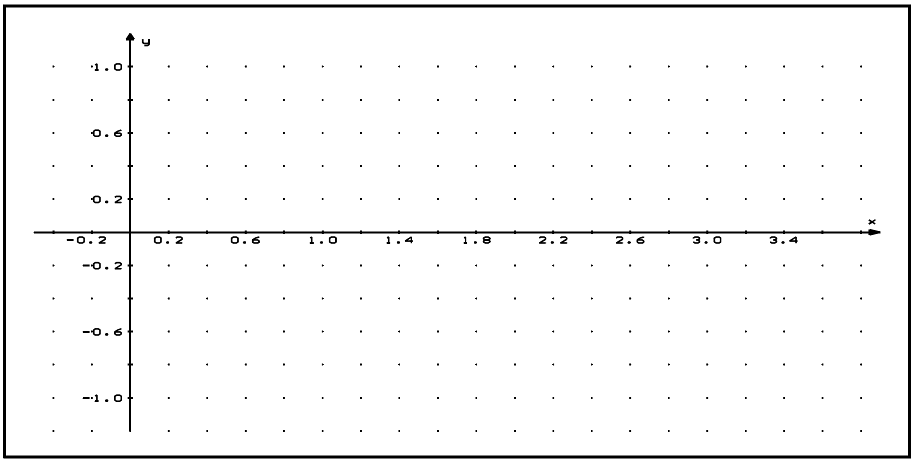
9 $U(t)=U_o \cdot \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t)$; T ist die Zeit, in der die Spannung eine volle Periode durchläuft.

Einen genaueren Wert für f´(1) erhält man, wenn für h die Werte 0,01 oder 0,001 oder ... gewählt werden. Diesem Vorgehen sind jedoch Grenzen gesetzt, weil der TR nicht mit beliebiger Genauigkeit rechnen kann. Gute Näherungswerte, die die mögliche Zeichengenauigkeit deutlich übertreffen, erhält man aber schon für h = 0,001:

$\sin'(1) \approx \frac{\sin(1{,}001) - \sin(1)}{0{,}001}$ (≈ 0,5399).

Aufgabe 54: Fülle die folgende Tabelle aus, indem für die angegebenen Stellen Näherungswerte von sin´(x) mit Hilfe des Differenzenquotienten (h=0,001) berechnet werden:

x	0,1	0,2	0,3	0,5	0,8	1,2	1,4	1,8	2,2	3	3,2
sin´(x) ≈											



Trägt man die sich aus der Wertetabelle ergebenden Punkte in das obige Koordinatenkreuz ein, erhält man eine Kurve, die dem Leser hoffentlich nicht ganz unbekannt ist.

Vermutung:

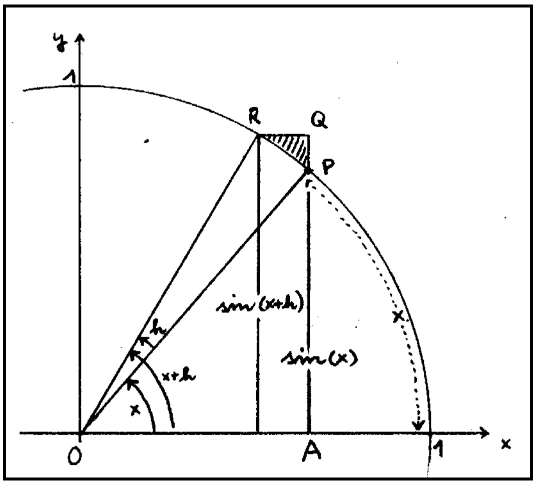
Die **Ableitung der Sinusfunktion** ist die ______________________________

sin´(x) =

Mit Hilfe desselben Vorgehens ergibt sich für die Ableitung der Kosinusfunktion die Vermutung:

cos´(x) =

Die Vermutung **sin´(x) = cos(x)** wurde nicht bewiesen, sondern ergab sich aus Näherungsrechnungen. Ein exakter Beweis ist hier nicht möglich, aber die folgenden Überlegungen unterstützen unsere Vermutung zusätzlich:



Für den Winkel x (im Bogenmaß!) und den positiven Wert h wurden die Werte sin(x+h) und sin(x) am Einheitskreis veranschaulicht.

Es ist $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$ zu berechnen.

Für h ≈ 0 sind die Dreiecke OAP und RPQ ähnlich, d.h. die Größen der Innenwinkel dieser beiden Dreiecke stimmen praktisch überein, da der Innenwinkel bei P im Dreieck OPR "ziemlich genau" 90° groß ist.

Der Innenwinkel bei P im Dreieck RPQ ist dann fast genauso groß wie x.

Nun gilt im Dreieck RPQ (der Winkel bei Q ist 90° groß): $\cos(x) = \dfrac{\text{Länge der Strecke PQ}}{\text{Länge der Strecke RP}}$.

Der Streckenlänge von QP im schraffierten Dreieck entspricht aber gerade der Zähler sin(x+h) - sin(x) und die Strecke RP ist für h ≈ 0 kaum noch von der Länge des Bogens selbst (=h) zu unterscheiden. Für h ≈ 0 erhält man also:

$$\cos(x) \approx \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

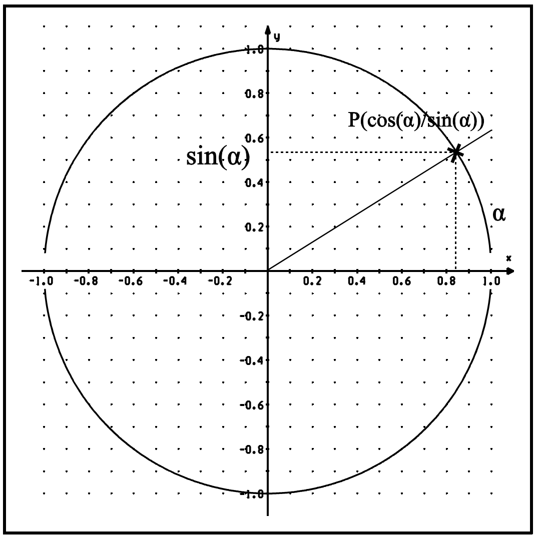
Für Werte von x und h, wie sie in der obigen Zeichnung vorausgesetzt wurden, ist also ganz offensichtlich

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)$$

richtig.

Ist bei der näherungsweisen Bestimmung von sin´(0,1) aufgefallen, dass sich der Wert sin(0,1) kaum von 0,1 unterscheidet? Zur Erinnerung: sin(0,1) = 0,0998... ! Rundet man auf drei Nachkommastellen, erhält man sin(0,1) ≈ 0,100 . Noch bessere Übereinstimmungen zwischen Funktionswert und Argument [10] x erhält man bei weiterer Annäherung an den Wert Null: sin(0,01) = 0,0099998... ; sin(- 0,0005) = - 0,00049999997... (bei diesem Wert werden die meisten TR schon direkt auf - 0,0005 runden).

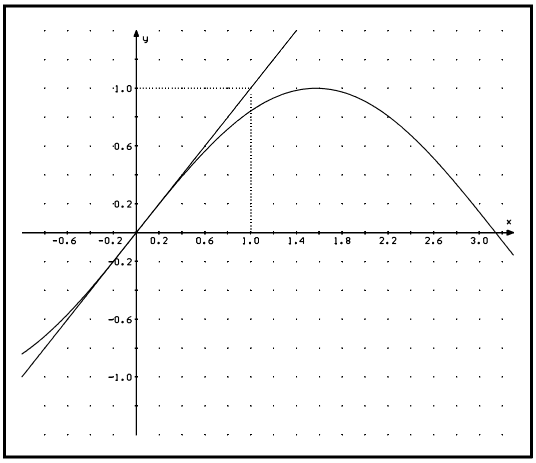
[10] argumentum, lat. = was der Erhellung und Veranschaulichung dient



Zur Erklärung dieses Phänomens [10] sieht man sich am Besten noch einmal die Graphik auf Seite 56 an: Die Länge des Lots vom Punkt P auf die x-Achse gibt den Wert von sin(α) an. Dieser Wert ist etwas kleiner als die Winkelgröße α (im Bogenmaß gemessen !!!). Nähert sich nun α dem Wert Null, so stimmen aber offensichtlich sin(α) und α immer besser überein. Dies gilt natürlich auch für negative Werte von α, wenn sie sich wenig von Null unterscheiden.

Für betragskleine Werte von x gilt:

$$\boxed{\sin(x) \approx x}$$



Dieser Sachverhalt lässt sich eindrucksvoll veranschaulichen, wenn man zusätzlich zum Graphen der Sinusfunktion die Tangente im Ursprung betrachtet:

Die Steigung der Sinusfunktion hat im Ursprung den Wert Eins, denn sin´(0) = cos(0).

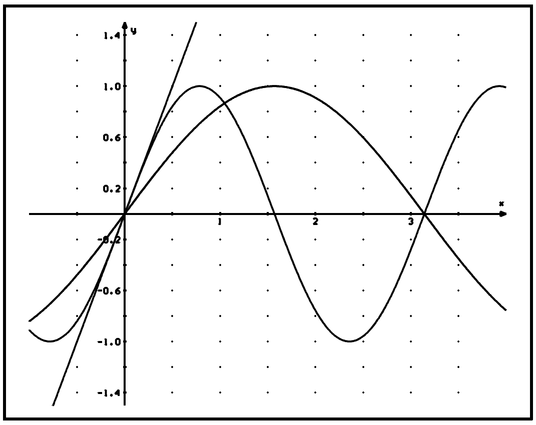
Daraus ergibt sich unmittelbar die Gleichung für die Tangente t im Ursprung:

$$\mathbf{t(x) = x}$$

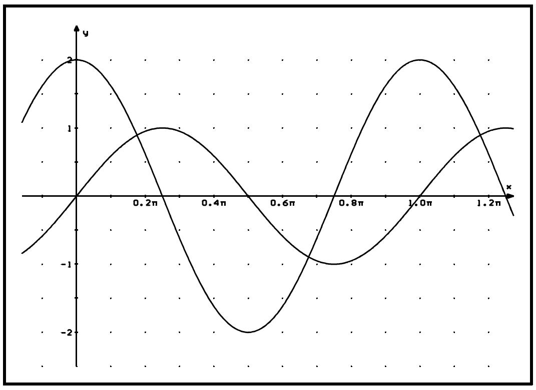
Die Tangente schmiegt sich besonders gut an den Graphen der Sinusfunktion; in der Nähe des Ursprungs kann die Computergraphik sin(x) und x nicht mehr unterscheiden.

---

10 phainomenon, gr. = das Erscheinende



Die Steigungen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion haben an keiner Stelle einen größeren Wert als 1 und natürlich auch keinen kleineren als - 1. Der Graph, der zu f(x)=sin(2x) gehört, verläuft aber im Ursprung deutlich steiler als der Graph der Sinusfunktion. (Links ist die Tangente an den zu sin(2x) gehörenden Graphen eingezeichnet.)
Damit ist klar, dass die Ableitung von sin(2x) nicht cos(2x) sein kann.



Links ist der Graph der durch **f(x) = sin(2x)** definierten Funktion und der Graph von **f′** dargestellt. An der Tangente im Ursprung der letzten Graphik konnte man schon erkennen, dass offenbar f′(0) = 2 gilt. Zur Probe wird näherungsweise f′(0,4·π) berechnet:

$$\frac{\sin\ (\ 2\ \cdot\ (0{,}4\pi\ +\ 0{,}001)\ )\ -\ \sin\ (\ 2\ \cdot\ (0{,}4\pi)\ )}{0{,}001}$$

≈ - 1,619 (das stimmt hervorragend mit der Zeichnung überein).

Der Graph von **f′** hat frappierende [11] Ähnlichkeit mit dem zu **g(x) = 2cos(2x)** gehörenden Graphen. g(0,4π) = - 1,6180... bestätigt die Vermutung f′(x) = g(x).
Will man diese Vermutung mit Hilfe des Differenzenquotienten beweisen, stößt man aber auf Schwierigkeiten. Betrachten wir einmal den Differenzenquotienten an der Stelle 1,3:

$$\frac{\sin\ (\ 2\ \cdot\ (1{,}3\ +\ h)\ )\ -\ \sin\ (\ 2\ \cdot\ 1{,}3\ )}{h} = \frac{\sin\ (\ 2{,}6\ +\ 2h\ )\ -\ \sin\ (\ 2{,}6\ )}{h}$$

Stünde im Nenner 2h, ließe sich der Limes des Differenzenquotienten sofort bestimmen. Es steht aber vorerst nur h im Nenner.

Einer der gängigsten “Tricks” in der Mathematik beruht auf dem Grundsatz:

Was der Mathematiker nicht hat, pumpt er sich!

[11] frapper, frz.= schlagen, treffen; frappieren = überraschen

$$\frac{\sin(2{,}6 + 2h) - \sin(2{,}6)}{h} = \frac{\sin(2{,}6 + 2h) - \sin(2{,}6)}{2h} \cdot 2$$

Nun lässt sich $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(2{,}6 + 2h) - \sin(2{,}6)}{h}$ berechnen:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(2{,}6 + 2h) - \sin(2{,}6)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin(2{,}6 + 2h) - \sin(2{,}6)}{2h} \cdot 2 \right)$$

$$= 2 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin(2{,}6 + 2h) - \sin(2{,}6)}{2h}$$

$$= 2 \cdot \cos(2{,}6)$$

Anmerkung:

Im Differenzenquotienten $\dfrac{\sin(2{,}6 + 2h) - \sin(2{,}6)}{2h}$ steht 2h im Zähler und im Nenner. Wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \to 0$ betrachtet wird, ist es gleichgültig, ob im Zähler **und** im Nenner **jeweils** h oder **jeweils** 2h steht. Wesentlich ist nur, dass zu 2,6 derselbe Wert addiert wird, der im Nenner steht. Wenn h gegen Null konvergiert, konvergiert auch 2h gegen Null.

Bitte bei allen Graphiken stets auf den (ggf. unterschiedlichen) Maßstab der Koordinatenachsen achten!

Nach demselben Verfahren lässt sich nachweisen, dass sin´(k·7,4) = k·cos(k·7,4) , ... gilt. Entsprechend lässt sich für jede Konstante k zeigen, dass die folgenden Formeln gelten:

$$\boxed{\sin'(k \cdot x) = k \cdot \cos(k \cdot x)}$$

$$\boxed{\cos'(k \cdot x) = -k \cdot \sin(k \cdot x)}$$

Aufgabe 55: Gib für die durch die folgenden Funktionsgleichungen definierten Funktionen eine Funktionsgleichung für f´ und f´´ und eine Funktionsgleichung für eine Stammfunktion an:

a)	$f(x) = \sin(3x)$	b)	$f(x) = 3 \cdot \sin(-5x)$
c)	$f(x) = \cos(-4x)$	d)	$f(x) = 0{,}6 \cdot \cos(2x+3)$
e)	$f(x) = a \cdot \sin(kx)$	f)	$f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$
g)	$f(t) = 5 \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$	h)	$f(t) = U_o \cdot \cos(\omega t)$

In den vorangegangenen Beispielen wurden Funktionen miteinander **"verkettet"**. Im Beispiel A55/a) wird x zuerst 3x zugeordnet, anschließend wird 3x dann sin(3x) zugeordnet. Die durch f(x) = sin (3x) definierte Funktion setzt sich also aus zwei Funktionen zusammen: f ergibt sich durch **Verkettung** der durch g(x)=3x und h(x)=sin(x) definierten Funktionen g und h:

$$\boxed{f(x) = h(g(x))}$$

Derartige Verkettungen kommen in Anwendungen vielfach vor, was am folgenden Beispiel demonstriert (demonstrare, lat. = hinweisen, deutlich machen) werden soll:
Jeder Skifahrer kennt den Druck auf den Ohren, wenn die Kabine **talwärts** benutzt wird, weil man sich die Abfahrt auf Skiern sparen möchte. Ursache ist die Zunahme des äußeren Luftdrucks bei Höhenverlust:
Fährt man beispielsweise mit der Gondel vom Kleinen Matterhorn (3820müM) zum Trockenen Steg, überbrückt man in rund acht Minuten einen Höhenunterschied von fast einem Kilometer und der Luftdruck nimmt in dieser Zeit um über 10% zu. In 3820 m über dem Meeresspiegel beträgt der Luftdruck übrigens nur noch rund **62% des Normaldrucks**, was jeder Mensch **deutlich** spürt, wenn er (untrainiert) aus dem Tal in diese Höhe fährt und auch nur geringste Anstrengungen unternimmt. Aus diesem Grund haben die Zermatter Betreiber dieser Seilbahn auch Achtungsschilder auf dem Trockenen Steg angebracht.)

Beschreiben wir diese Druckzunahme während der Talfahrt mathematisch. Der Druck p hängt von der Höhe h ab: **p = p(h)** .
Die Höhe h selbst hängt wiederum von der Zeit t ab, die nach der Abfahrt der Gondel verstrichen ist: **h = h(t)**. Damit lässt sich der Druck in Abhängigkeit von der Zeit angeben:

$$\mathbf{p = p(\ h(t)\ )}$$

Der Druck ergibt sich also durch "Verkettung" der Funktionen "p(h)" und "h(t)". Die Mathematiker sagen, dass der Druck durch die **Hintereinanderausführung** der beiden anderen Funktionen definiert ist:
Zuerst wird h(t) "ausgeführt", **anschließend** wird p(h) "ausgeführt": Der Druck wird also in Abhängigkeit von t durch p(**h(t)**) berechnet. **Für p(h(t)) schreibt man auch p∘h(t)**.

Meinen Ohren ist es ziemlich gleichgültig, in welcher Höhe ich mich gerade befinde, wenn die Gondel **steht**. Sie reagieren aber sehr empfindlich auf die **Änderung des Drucks in einem kleinen Zeitintervall** (sie reagieren auf die lokale Änderungsrate des Drucks):
Meine Ohren registrieren [12] die **Ableitung des Drucks zum Zeitpunkt t**.

Gesucht ist also $(p \circ h)'(t)$.

Veranschaulichen wir uns die Hintereinanderausführung (Verkettung) zweier Funktionen noch an folgendem Beispiel:
Es gelte $g(x) = x^2$ und $h(x) = 3x+4$.

Dann ist
$$\begin{aligned} h(\ g(x)\ ) &= h(\ x^2\ ) \\ &= 3x^2 + 4 \qquad \text{und} \\ g(\ h(x)\ ) &= g(\ 3x+4\ ) \\ &= (\ 3x+4\ )^2 \\ &= 9x^2 + 24x + 16\ . \end{aligned}$$

Es ist also wesentlich, in welcher Reihenfolge die beiden Funktion hintereinander ausgeführt werden.

Aufgabe 56: Gib jeweils h(g(x)) und g(h(x)) an.

a) $g(x) = x^2$; $h(x) = x + 5$

b) $g(x) = x^2$; $h(x) = 4 - 3x$

c) $g(x) = x^2 + 1$; $h(x) = (x - 1)^2$

d) $g(x) = \sin(x)$; $h(x) = x^2$

e) $g(x) = \cos(x)$; $h(x) = \frac{1}{x}$

[12] registrum, mlat. = Verzeichnis

Aufgabe 57: Gib die Funktionsgleichungen von zwei Funktionen [13] an, die durch Verkettung die Funktionsgleichung von f ergeben:

a) $f(x) = (-5x + 4)^3$ b) $f(x) = (3x^4 - 5x)^2$

c) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ f) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

g) $f(x) = (ax + b)^n$ h) $f(t) = \cos(\omega t - \varphi)$

Wie leitet man "sin ($\sqrt{x}$)" ab?

Da noch keine Formel bekannt ist, muss wieder "der Weg zu Fuß" [14] über den Differenzenquotienten gewählt werden. Gesucht ist also

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(\sqrt{x+h}) - \sin(\sqrt{x})}{h}$$

Es soll konkret die Steigung von f an der Stelle 49 berechnet werden:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(\sqrt{49+h}) - \sin(\sqrt{49})}{h} = ?$$

Wie im Beispiel auf den Seiten 62/63 kann nicht unmittelbar untersucht werden, ob

$$\frac{\sin(\sqrt{49+h}) - \sin(\sqrt{49})}{h}$$

überhaupt einen Grenzwert hat, weil im Nenner **nicht** $\sqrt{49+h} - \sqrt{49}$ steht. Wir können den Differenzenquotienten aber geschickt nach dem Motto "was die Mathematikerin nicht ...." erweitern:

---

13 In früheren Auflagen stand hier: "Gib die Funktionsgleichungen der beiden Funktionen an, die durch ....".
Es liegt zwar nahe, in A57a) die Funktionsgleichungen $g(x)=-5x+4$ und $h(x)=x^3$ als einzige Lösungen zu vermuten, doch ist diese Aufgabe nicht eindeutig lösbar!

14 Siehe Prolog7/8

$$\frac{\sin(\sqrt{49+h}) - \sin(\sqrt{49})}{h} = \frac{\sin(\sqrt{49+h}) - \sin(\sqrt{49})}{h} \cdot \frac{\sqrt{49+h} - \sqrt{49}}{\sqrt{49+h} - \sqrt{49}}$$

$$= \frac{\sin(\sqrt{49+h}) - \sin(\sqrt{49})}{\sqrt{49+h} - \sqrt{49}} \cdot \frac{\sqrt{49+h} - \sqrt{49}}{h}$$

Der Differenzenquotient ist nun in ein Produkt zerlegt worden, bei dem jeder einzelne Faktor konvergiert, wenn h gegen Null konvergiert:

$\frac{\sqrt{49+h} - \sqrt{49}}{h}$ konvergiert für $h \to 0$ gegen $\frac{1}{2 \cdot \sqrt{49}}$ (siehe Prolog 8):

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{49+h} - \sqrt{49}}{h} = \frac{1}{14}$$

. (Das ist die Ableitung von $\sqrt{x}$ an der Stelle 49 !!!)

Der Faktor $\frac{\sin(\sqrt{49+h}) - \sin(\sqrt{49})}{\sqrt{49+h} - \sqrt{49}}$ konvergiert aber für $h \to 0$ auch:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(\sqrt{49+h}) - \sin(\sqrt{49})}{\sqrt{49+h} - \sqrt{49}} = \cos(\sqrt{49}) .$$

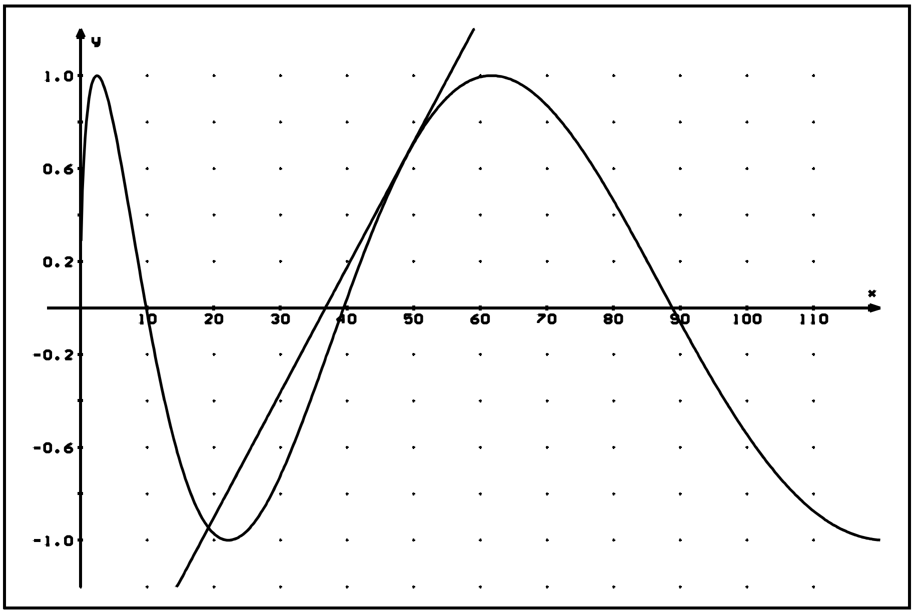
(Siehe Prolog 5: Wenn h gegen Null konvergiert, konvergiert 49+h gegen 49 und $\sqrt{49+h}$ konvergiert gegen $\sqrt{49}$.)

Damit muss aber (siehe Produktgrenzwertsatz aus Klasse 11)

$\frac{\sin(\sqrt{49+h}) - \sin(\sqrt{49})}{\sqrt{49+h} - \sqrt{49}} \cdot \frac{\sqrt{49+h} - \sqrt{49}}{h}$ konvergieren. Es gilt:

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin(\sqrt{49+h}) - \sin(\sqrt{49})}{\sqrt{49+h} - \sqrt{49}} \cdot \frac{\sqrt{49+h} - \sqrt{49}}{h} \right) = \cos(7) \cdot \frac{1}{14}$$

(≈ 0,054)



Oben wurde an der Stelle 49 die Tangente an den durch $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ definierten Graphen eingezeichnet.

Aufgabe 58:
Bestätige durch näherungsweise (TR!) Berechnung der Funktionswerte f(5), f(10), f(20), f(50) und f(100), dass es sich oben tatsächlich um den zu

“$\sin(\sqrt{x})$”

gehörenden Graphen handelt.
Bestimme aus einem Steigungsdreieck die Steigung der Tangente. (Maßstab der Koordinatenachsen beachten!)

Zusammenfassung:

Die Ableitung von $\sin(\sqrt{x})$ an der Stelle 49 ist $\cos(\sqrt{49}) \cdot \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{49}}$.

Entsprechend erhalten wir für irgendein positives x:

$$\boxed{(\sin(\sqrt{x}))' = \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}}$$

Bezeichnen wir nun die Sinusfunktion mit h und die Wurzelfunktion mit g, so gilt

$$\sin(\sqrt{x}) = h(g(x))$$

bzw. $$\sin(\sqrt{x}) = h \circ g(x)$$

Als Ableitung von $h \circ g$ ergibt sich also:

$$(h \circ g)' = (h' \circ g) \cdot g'$$

Diese Gleichung findet man in Formelsammlungen eingängiger in folgender Schreibweise:

$$\boxed{(h(g(x)))' = h'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Dies ist die sogenannte **KETTENREGEL** . Man merkt sich diese Regel in der Form

Kettenregel:
“äußere mal innere Ableitung”

Anmerkung:

Der Beweis für obige Formel funktioniert für alle Funktionen, die eine Ableitung besitzen, in derselben vorgeführten Form, wenn g eine streng monoton wachsende Funktion ist. Ist g nicht streng monoton wachsend, ist der Beweis etwas schwieriger. (Wir verzichten hier auf den allgemeinen Beweis.)

Überprüfen wir einmal die Kettenregel am Beispiel **f (x) = (3x^4 - 5x)^2** :

Die “innere Funktion” ist durch $g(x) = 3x^4 - 5x$ definiert, die “äußere” durch $h(x)=x^2$.

Es gilt $h'(x) = 2x$, also folgt: $h'(g(x)) = 2 \cdot (3x^4 - 5x)$.
Da $g'(x) = 12x^3 - 5$, folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot (3x^4 - 5x) \cdot (12x^3 - 5) \\ &= (6x^4 - 10x) \cdot (12x^3 - 5) \\ &= 72x^7 - 30x^4 - 120x^4 + 50x \\ &= 72x^7 - 150x^4 + 50x \end{aligned}$$

Die Ableitung von f lässt sich aber auch ohne Anwendung der Kettenregel ermitteln, wenn der Funktionsterm von f ausmultipliziert wird:

Aus $f(x) = 9x^8 - 30x^5 + 25x^2$ folgt dann:

$$f'(x) = 72x^7 - 150x^4 + 50x$$ ☺

An dieser Stelle ist der Einwand “ohne Kettenregel geht´s doch viel schneller” nicht von der Hand zu weisen. Es sollte aber hier nur gezeigt werden, dass “viele Wege nach Rom führen können” **und** dieses Beispiel stärkt mein Vertrauen in die Kettenregel. Davon abgesehen wüsste ich aber nicht, wie ich die Ableitung von $\sin(\frac{1}{x})$ ohne Kettenregel bestimmen könnte. Mit Kettenregel:

$g(x) = \frac{1}{x}$; also (Vokabel): $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

$h(x) = \sin(x)$; also (Vokabel): $h'(x) = \cos(x)$.

$f(x) = h (g(x))$; also:

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 59: Bestimme mit Hilfe der Kettenregel jeweils die erste Ableitung.

a) $f(x) = (\sin(x))^3$ b) $f(x) = \cos(x^3)$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ d) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ **(siehe Tipp)**

e) $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ f) $f(x) = \frac{1}{x^4}$

g) $f(x) = \frac{1}{x^7}$ h) $f(x) = \frac{1}{x^{10}}$

TIPP: Manche Menschen haben größere Schwierigkeiten zu erkennen, welche nun die "innere", welche die "äußere Funktion" ist. Ich stelle mir immer vor, wie ich vorgehen würde, wenn ich einen Funktionswert mit dem TR berechne. Betrachten wir also die Aufgabe d): Will ich f(- 0,5) berechnen, "muss" ich **zuerst** mit dem TR **sin(- 0,5)** berechnen [15]. **Also** ist $\mathbf{g(x) = \sin(x)}$ die Funktionsgleichung für die **innere** Funktion. **Anschließend** drücke ich nur noch die Taste "$\frac{1}{x}$" auf dem TR.

$h(x) = \frac{1}{x}$ definiert die **äußere** Funktion.

Aufgabe 60:

a) Welche Steigung hat der Graph der Sinusfunktion an der Stelle $\frac{\pi}{3}$? (Bitte den exakten Wert angeben.)

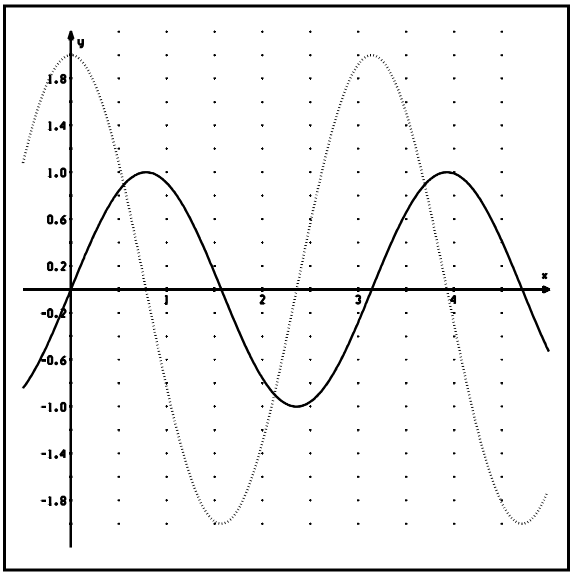
b) Gib jeweils die exakten Werte an: $\cos'(\pi) = ?$; $\sin'(\pi) = ?$

c) Es gelte $f(x) = \sin(2x)$ und $g(x) = \cos(2x)$
Bestimme näherungsweise (h = 0,001) über den Differenzenquotienten die folgenden Werte (bitte erst die Endergebnisse auf vier Nachkommastellen runden):
$f'(1)$; $f'(3)$; $g'(1)$; $g'(3)$

Gib die exakten Werte von $f'(\frac{\pi}{2})$ und $f'(\frac{\pi}{4})$ an. Gib auch Näherungswerte (h=0,001) mit Hilfe des Differenzenquotienten an.

d) Es gelte $g(x) = \cos(0{,}5x)$ und $h(x) = \sin(0{,}5x)$.
Berechne wie in Teilaufgabe c) Näherungswerte bzw. gib die exakten Werte an:
$g'(2)$; $g'(4)$; $h(2)$; $h(4)$; $g'(\frac{\pi}{4})$;
$g'(\pi)$; $h(\frac{\pi}{4})$; $h(\pi)$.

[15] Ich weiß, dass es inzwischen "neumodische" TR gibt, die anders rechnen, der Tipp also bei diesen Rechnern überflüssig ist.



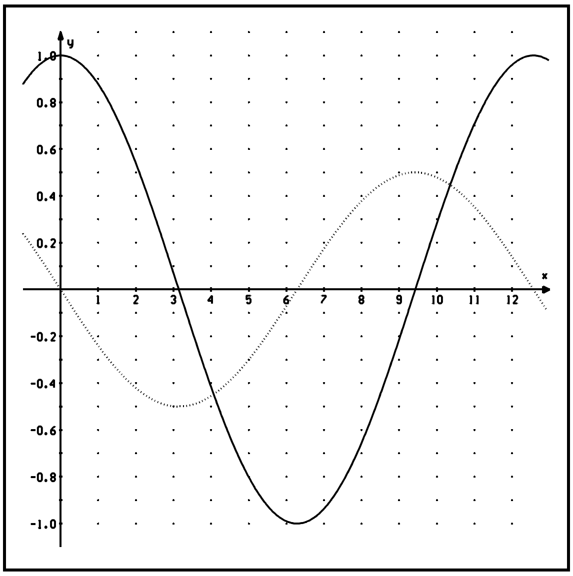
Aufgabe 61:
Gegeben sind zwei Funktionen f (durchgezogen) und g mit den Funktionstermen sin (a·x) bzw. b·cos (c·x).

f hat an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ eine Nullstelle, der Graph von g hat in ($\frac{\pi}{2}$ / - 2) einen Tiefpunkt.

a) Gib die Funktionsgleichungen der beiden Funktionen an.

b) Bestimme die Steigungen der Graphen an den Nullstellen.

c) Berechne $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ und $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} g(x)dx$.



Aufgabe 62:
Gegeben sind zwei Funktionen f (gepunkteter Graph) und g mit den Funktionstermen
a · sin(b·x) bzw. **c · cos(d·x)**.
Der Graph von g geht durch die Punkte (π/0) und (0/1). Der Graph von f geht durch die Punkte (2π/0) und (π/- 0,5).

a) Gib die Funktionsgleichungen für f und g an.

b) Bestimme die Flächeninhalte der Flächen, die die beiden Graphen jeweils zwischen ihren ersten beiden positiven Nullstellen mit der x-Achse einschließen.

Aufgabe 63: Bestimme den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion und der x-Achse im Intervall [0/$\frac{\pi}{2}$] begrenzt wird. (Skizze!)

Aufgabe 64: Skizziere den zu f(x)=3·sin(2x)+3 gehörenden Graphen im Intervall [- $\frac{\pi}{2}$/π].
(Es genügt, die gemeinsamen Punkte mit den Koordinatenachsen und die Hoch- bzw. Tiefpunkte zu ermitteln.)
Bestimme die größte negative und die kleinste positive Nullstelle von f. Welchen Flächeninhalt schließt der Graph von f zwischen diesen beiden Nullstellen mit der x-Achse ein?

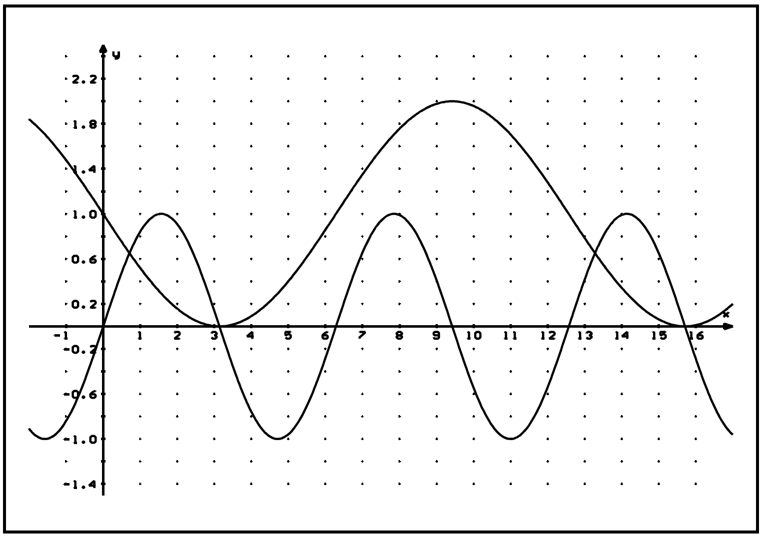
Aufgabe 65: Skizziere den zu f(x)=2·sin(0,5x)-1 gehörenden Graphen im Intervall [- 1/6].
(Es genügt, die gemeinsamen Punkte mit den Koordinatenachsen und die Hoch- bzw. Tiefpunkte zu ermitteln.)
Bestimme die Steigung des Graphen im Schnittpunkt mit der y-Achse.
Bestimme den Inhalt der Fläche, die der Graph im vierten Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt.
Wie groß ist der Inhalt der Fläche, die der Graph zwischen den ersten beiden positiven Nullstellen mit der x-Achse einschließt?

Aufgabe 66: Skizziere den zu f(x)=5·cos(0,5x) gehörenden Graphen im Intervall [- 1/10].
Bestimme die kleinste positive Zahl k, für die $\int_0^k f(x)dx = 5$ gilt. Überprüfe die Lösung an der Skizze.
Begründe, warum die Gleichung $\int_0^k f(x)dx = 5$ nicht nur eine Lösung besitzt.

Aufgabe 67: Gegeben sind f durch f(x) = - sin(x) und g durch sin(2x). Ermittle die ersten beiden positiven Schnittstellen der zu f und g gehörenden Graphen. (Tipp: Eine Schnittstelle erkennt man unmittelbar, die andere kann man durch Probieren finden, wenn man seine Vokabeln über die Funktionswerte der Sinusfunktion nicht vergessen hat.)
Skizziere die beiden Graphen und bestimme den Inhalt der Fläche, die die beiden Graphen im Intervall [0 / 2π] einschließen.

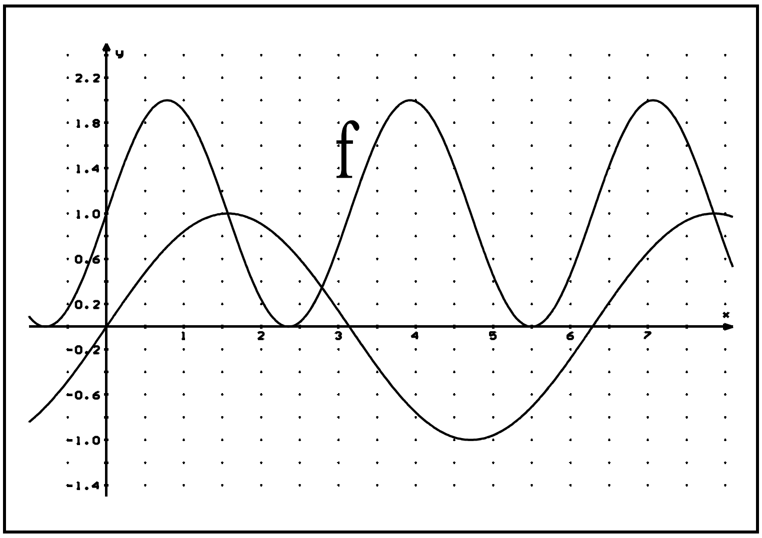
Aufgabe 68: Gegeben ist f durch f(x) = cos(0,5x). Welche zur y-Achse parallele Gerade zerlegt die von der y-Achse, der x-Achse und dem Graphen von f im Intervall [0 / π] begrenzte Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen?
Veranschauliche die Lösung in einer Skizze. **Bestätige** und **erläutere** die Tatsache, dass $k = \frac{5\pi}{3}$ eine Lösung der Gleichung $\int_0^k f(x)dx = \int_k^\pi f(x)dx$ ist.

Aufgabe 69: Gegeben sind die Sinusfunktion f und die Funktion g, die durch $g(x)=a\cdot\sin(bx) + c$ definiert ist. Die Graphen von f und g haben für ganzzahlige Vielfache von π gemeinsame Nullstellen. Der Punkt (0/1) liegt auf dem Graphen von g.
Gib die Funktionsgleichung von g an.
0,71 ist ein Näherungswert für die erste positive Schnittstelle der beiden Graphen (gib unter Benutzung des TRs Näherungswerte für g(0,71) und f(0,71) an).
Wie groß ist der Inhalt der von den beiden Graphen im Intervall [0,71/ π] eingeschlossenen Fläche?
Gib einen Näherungswert x_3 für die dritte positive Schnittstelle der beiden Graphen an.



Bestimme den Inhalt, den die beiden Graphen im Intervall [π/x_3] einschließen.
Bestimme unter Benutzung des Newton-Verfahrens (ausgehend von 0,71) einen besseren Näherungswert für die erste positive Schnittstelle. (Rechne mit voller TR-Genauigkeit und runde das Endergebnis auf vier Nachkommastellen.)

Aufgabe 70:
Gib die Funktionsgleichungen von f und g an.
Wo liegt die kleinste positive Schnittstelle der Graphen? (Eine Vermutung ergibt sich aus den Graphen. Diese Vermutung bestätigt man durch sein Vokabelwissen).
Bestimme den Inhalt der Fläche, die von der y-Achse und den beiden Graphen im ersten Quadranten eingeschlossen wird.



Bestimme den Inhalt der Fläche, die die x-Achse und die beiden Graphen (bis zur kleinsten positiven Nullstelle von f) einschließen.

Aufgabe 71:

a) Fertige eine **Zeichnung** des Graphen der Kosinusfunktion und des zu g(x) = x gehörenden Graphen an. Gib nun auf Grund der Zeichnung einen Näherungswert x_S für die Schnittstelle der beiden Graphen an. (Warum haben die beiden Graphen genau einen Schnittpunkt?)

b) Bestimme unter Benutzung des unter a) ermittelten Wertes für x_S den Inhalt der Fläche, die von der y-Achse, dem Graphen der Kosinusfunktion und dem Graphen von g begrenzt wird.

c) Bestimme unter Benutzung des unter a) ermittelten Wertes für x_S den Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, dem Graphen von g und dem der Kosinusfunktion begrenzt wird.

d) Bestimme mit Hilfe des **Newton-Verfahrens** (Startwert: x_S aus Teil a)) einen neuen Näherungswert für die Schnittstelle. Um wie viel Prozent weicht dieser Wert vom Wert 0,739085 ab (dieser Wert gibt die ersten sechs Nachkommastellen der Schnittstelle exakt an) ?

Wenn ich zum Zeitpunkt des jetzigen Wissenstandes im Grundkurs und auch im Leistungskurs nach der Ableitung von "$x \cdot \sin(x)$" frage, bekomme ich immer spontan [16] die Antwort "cos(x)". Jedem, der den Kurs bisher aufmerksam verfolgt hat, leuchtet ein, welche Gedanken zu dieser Antwort führen.

Antwortet man nicht spontan, sondern holt sich "Gelerntes" zurück, wird man spontan einsehen, dass diese Antwort falsch sein muss:

Erste Vokabel: $\cos(0) = 1$

Zweite Vokabel: $\sin(x) \approx x$, wenn $x \approx 0$.
Die durch $f(x) = x \cdot \sin(x)$ definierte Funktion muss also in einer kleinen Umgebung der Nullstelle ungefähr dieselben Funktionswerte wie g ($g(x) = x^2$) haben.

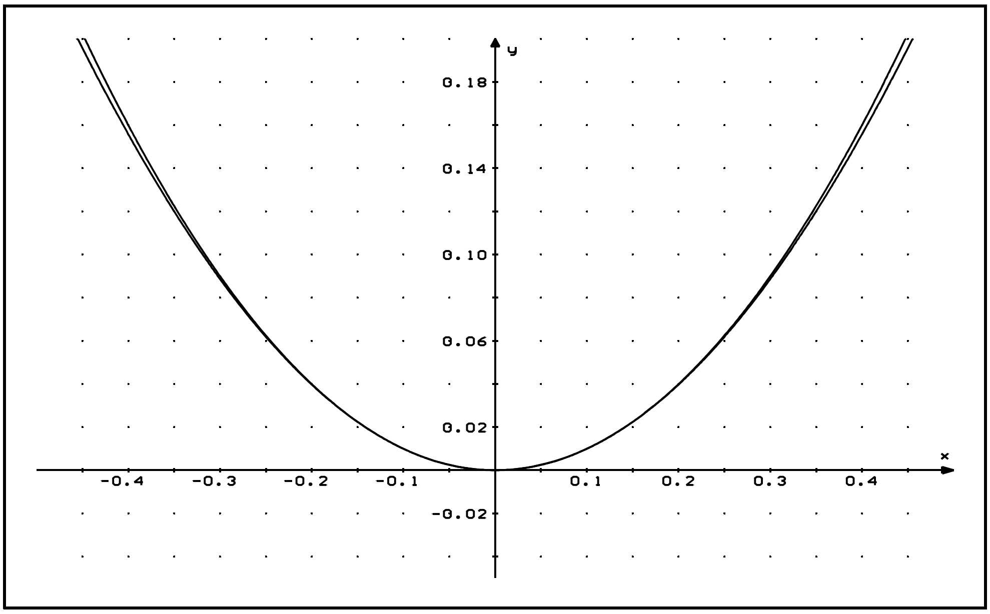
Dritte Vokabel: Ableitungen geben Steigungen an.

Vierte Vokabel: Die Normalparabel hat im Ursprung nicht die Steigung 1.

Auch ohne Computer (ein Taschenrechner [17] genügt) kann man sich den Graphen von f in einer kleinen Umgebung des Ursprungs veranschaulichen.

[16] spons, lat. = [An]trieb, freier Wille

[17] Erst seit 1972 gibt es Taschenrechner auf dem Markt, die damals aber unglaublich teuer waren. 1973 kostete ein TR, der nicht mehr Funktionen hatte als heute ein "5-Euro-Teil", rund 1000.- DM (≈ 500 Euro.)



Aufgabe :
Welcher der beiden Graphen gehört zu **x·sin(x)**, welcher zu $\mathbf{x^2}$?

Im Gegensatz zu Summen dürfen
bei Produkten die Faktoren nicht einfach einzeln abgeleitet werden.

Also: Wie leitet man nun aber ein Produkt ab???

Eine Idee, nach welcher Regel Produkte abzuleiten sind, kann man sich selbst verschaffen, wenn man die auf der nächsten Seite folgende Tabelle ausfüllt. Man muss nur

1. richtig rechnen (d.h. die Funktionswerte berechnen und in der letzten Spalte **zuerst** ausmultiplizieren und **dann** ableiten),

2. etwas kombinieren.

PRODUKTREGEL

x	$f(x)=2x+1$	$g(x) = x^2$	$f\,'(x) =$	$g\,'(x) =$	$(f(x)\cdot g(x))\,' =$
1					
2					
-1					

x	$f(x) = x^2 + x$	$g(x) = x^3$	$f\,'(x) =$	$g\,'(x) =$	$(f(x)\cdot g(x))\,' =$
1					
2					
-1					

Vermutung:

$$\boxed{(\, f(x) \cdot g(x) \,)\,' = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Überprüfe die Vermutung am Beispiel " $f(x) = x^3 + x$ und $g(x) = x^2 - 4x$ " für die Zahlen $x = -2$ und $x = 3$.

Nun soll die **Produktregel**

$$\boxed{(\, u(x) \cdot v(x)\,)' \;=\; u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

bewiesen werden. (Für die Faktoren wurde die Bezeichnung u und v gewählt, weil man die Formel so in praktisch allen Formelsammlungen findet. Natürlich hätte man genau so gut

$(\, f(x) \cdot g(x)\,)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ oder kurz $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

schreiben können.) Wir setzen voraus, dass u und v Funktionen sind, die Ableitungen besitzen (vornehm ausgedrückt: u und v sollen differenzierbar sein).

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h} = ???\ ☹$$

An dieser Stelle kommt man weiter, wenn man versucht, die Voraussetzung ins Spiel zu bringen. (In aller Regel wird man bei einem Beweis **immer nachsehen**, “was man überhaupt hat”.) Wir wissen, dass u und v differenzierbar sind, was nichts anderes heißt als:

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad \text{und} \quad \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \qquad \text{existieren.}$$

Der Differenzenquotient $\frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h}$ lässt sich nach der Methode “was der .... holt er sich” umformen, wobei man sich zusätzlich an den Beweis über Produktfolgen erinnern sollte.[18]

Im Zähler des Differenzenquotienten wird ein Term subtrahiert und gleich wieder addiert, der es ermöglicht, die Voraussetzung anzuwenden:

$$\frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x+h) + u(x) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h} =$$

$$\frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x+h)}{h} + \frac{u(x) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h} =$$

---

18 (Nicht in jeder 11. Klasse wird dieser Beweis durchgeführt, mit dem gezeigt wird, dass das Produkt zweier konvergenter Folgen auch wieder eine konvergente Folge ist. In diesem Beweis wird “geschickt” ein Term addiert und gleich wieder subtrahiert (siehe **Seite 62** unten!!!) und alle wirklichen Beweisprobleme sind gelöst. Man findet diesen Beweis in jedem ordentlichen Mathematikbuch für die Klassenstufe 11.)

$$\frac{(u(x+h)\ -\ u(x))\ \cdot\ v(x+h)}{h} + \frac{u(x)\ \cdot\ (v(x+h)\ -\ v(x))}{h} =$$

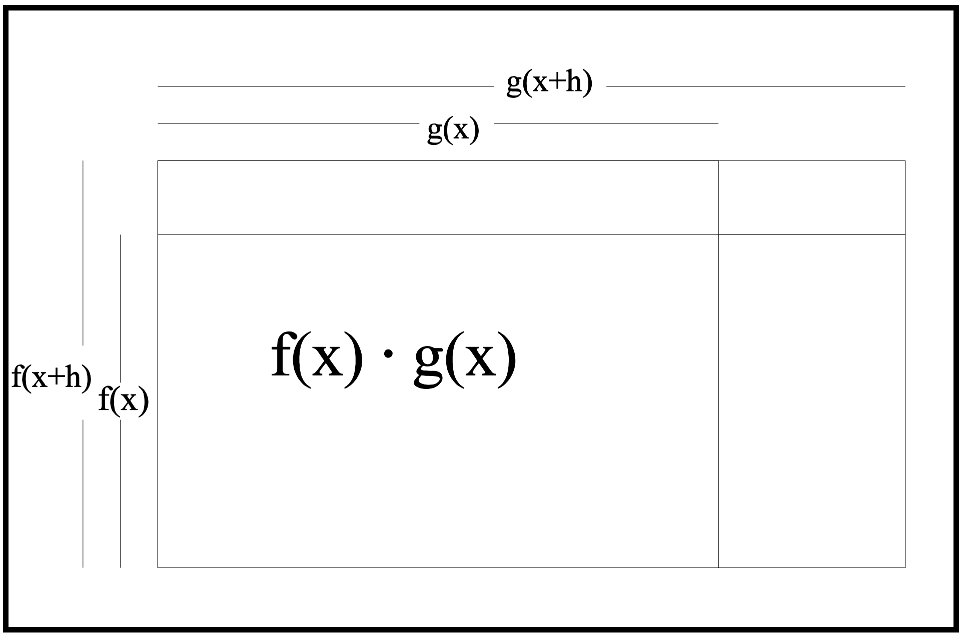
$$\frac{u(x+h)\ -\ u(x)}{h} \cdot v(x+h) + u(x) \cdot \frac{v(x+h)\ -\ v(x)}{h}$$ “☺”,

denn der Faktor des ersten Summanden konvergiert für $h \to 0$ gegen $u'(x)$, der zweite Faktor konvergiert (Vorsicht!) gegen $v(x)$, $u(x)$ ist für $h \to 0$ konstant und der letzte Term konvergiert gegen $v'(x)$.

Wenn also $\lim\limits_{h \to 0} v(x+h) = v(x)$ gilt, folgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)\ \cdot\ v(x+h)\ -\ u(x)\ \cdot\ v(x)}{h} = \mathbf{u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)\ .}$$

Für differenzierbare und streng monoton wachsende Funktionen f und g lässt sich die Produktregel mit Hilfe von Rechtecksinhalten einfach veranschaulichen.
Für ein positives h müssen $f(x+h)$ und $g(x+h)$ größer als $f(x)$ und $g(x)$ sein. Sind jetzt $f(x)$ und $g(x)$ positiv, so lässt sich das Produkt $f(x) \cdot g(x)$ als Rechteckfläche darstellen:



Der Zähler des Differenzenquotienten dq = $\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$ entspricht dem Inhalt der drei Rechtecke, die man erhält, wenn man vom großen Rechteck mit dem Inhalt f(x+h)·g(x+h) das Rechteck mit dem Inhalt f(x)·g(x) subtrahiert.

Diese drei Rechtecke haben die Inhalte

- (f(x+h) - f(x)) · g(x)
- (g(x+h) - g(x)) · f(x) und
- (f(x+h) - f(x)) · (g(x+h) - g(x)) .

Man kann also den obigen Differenzenquotienten in folgender Form darstellen:

$$dq = \frac{(f(x+h)-f(x))\cdot g(x) + (g(x+h)-g(x))\cdot f(x) + (f(x+h)-f(x))\cdot(g(x+h)-g(x))}{h}$$

Zerlegt man diesen Bruch in drei Einzelbrüche, erhält man:

$$dq = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x) + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f(x) + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot(g(x+h)-g(x))$$

Konvergiert nun h gegen Null, so konvergiert der erste Summand gegen f´(x) · g(x) , der zweite gegen g´(x) · f(x) und der dritte gegen Null, da g(x+h)-g(x) gegen Null konvergiert.

Jetzt lässt sich x · sin(x) ableiten:

“Ableitung des ersten Faktors mal zweitem Faktor plus erster Faktor mal Ableitung...”

$$\begin{aligned} f(x) &= x\cdot\sin(x) \\ f'(x) &= (x\cdot\sin(x))' \\ &= 1\cdot\sin(x) + x\cdot\cos(x) \\ &= \sin(x) + x\cdot\cos(x) \\ f'(0) &= \sin(0) + 0\cdot\cos(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

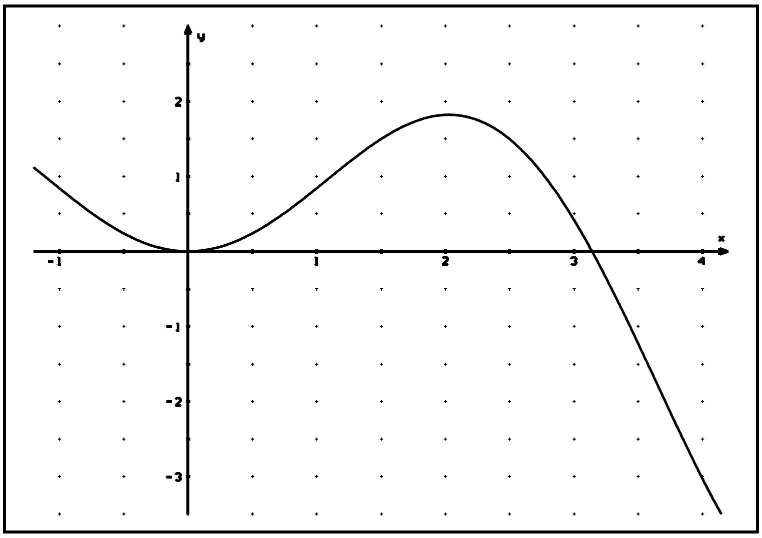
, wie wir es erwartet haben.

Aufgabe: Ermittle den Verlauf des Graphen der durch $f(x) = x \cdot \sin(x)$ definierten Funktion im Intervall [- 1 / 4].

Lösung: Ein Produkt hat den Wert Null, wenn einer der Faktoren den Wert Null hat. Der erste Faktor (x) nimmt nur an der Stelle x=0 den Wert Null an, der zweite Faktor nimmt im angegebenen Intervall noch an der Stelle π den Wert Null an ($\sin(\pi)=0$). Zwischen diesen beiden Nullstellen muss "irgendwo" ein Hochpunkt liegen. Ich kenne aber keine Möglichkeit, wie wir mit bisher gelernten Methoden eine Lösung der Gleichung $\mathbf{0 = \sin(x) + x\cdot\cos(x)}$ finden können. (Die Stellen waagerechter Tangenten sind die Nullstellen von f′.)
Man kann sich an eine Lösung "herantasten", indem man z.B. eine Wertetabelle anfertigt und den Graphen grob skizziert. Der folgenden Wertetabelle entnimmt man, dass sich zwischen 1,5 und 2,5 eine waagerechte Tangente befinden muss.

Aufgabe 72: Skizziere den Graphen von f im Intervall [-1/4] unter Verwendung der unten ausgedruckten Tabelle.

x	f(x)
- 1	0,8414709848
- 0,5	0,2397127693
0	0
0,5	0,2397127693
1	0,8414709848
1,5	1,4962424799
2	1,8185948537
2,5	1,4961803603
3	0,4233600242
3,5	-1,227741297
4	-3,027209981



Das Bild oben bestätigt unsere bisherigen Ergebnisse. Der einzige “Schönheitsfehler” besteht nur darin, dass ein Weg gefunden werden muss, die Extremwertstelle x_E rechnerisch zu ermitteln:

Es gilt $f'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$. Für x_E muss

$$\mathbf{\sin(x_E) + x_E \cdot \cos(x_E) = 0}$$

gelten.

Es lässt sich an dieser Stelle nicht beweisen, **dass es keine Formel** [19] **gibt**, nach der man x_E aus der obigen Gleichung explizit [20] bestimmen (= nach x_E auflösen) kann. Für x_E können nur Näherungswerte, die aber mit beliebig gewünschter Genauigkeit, angegeben werden.

Zwei Näherungsrechnungen bieten sich an:
1. Man versucht x_E einzuschachteln.
2. Man benutzt das Newtonsche Näherungsverfahren.

Das Schachtelungsverfahren sei Menschen überlassen, die gerne auf dem TR tippen, hier soll gezeigt werden, wie gut und wie schnell das Newton-Verfahren Näherungswerte für x_E liefert. Das Newton-Verfahren dient zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen, die Formel wurde im Prolog zur Erinnerung angegeben.

Gesucht ist eine Nullstelle der durch $g(x)=\sin(x) + x \cdot \cos(x)$ definierten Funktion (**g = f′** !!!). Die Wertetabelle für f legt nahe, mit dem Startwert $x_1 = 2$ zu beginnen:

$x_2 = 2 - \dfrac{g(2)}{g'(2)}$. (Es muss also noch $g' = f''$ berechnet werden!)

---

[19] wie z.B. die p-q-Formel, mit der man eine gemischtquadratische Gleichung nach x auflösen kann

[20] explicare, lat. = entfalten, entwirren

Aufgabe 73: $f(x) = x \cdot \sin(x)$. Bestimme $f''(x)$.

Unter Benutzung des Ergebnisses von Aufgabe 73 folgt nun:

$$x_2 = 2 - \frac{\sin(2) + 2 \cdot \cos(2)}{2 \cdot \cos(2) - 2 \cdot \sin(2)}$$

$$x_2 \approx 2 - (-0{,}029)$$

$$x_2 \approx 2{,}029.$$

(Zum Vergleich: $\mathbf{x_E = 2{,}02875}$ ...)

Das Newton-Verfahren hat uns also in einem Schritt einen Näherungswert geliefert, der auf drei Nachkommastellen gerundet mit dem exakten Wert übereinstimmt. [21]

Mit dem Funktionswert $f(2{,}029) = 2{,}029 \cdot \sin(2{,}029)$ ($\approx 1{,}820$) lässt sich der Graph von f im gewünschten Intervall nun gut skizzieren.

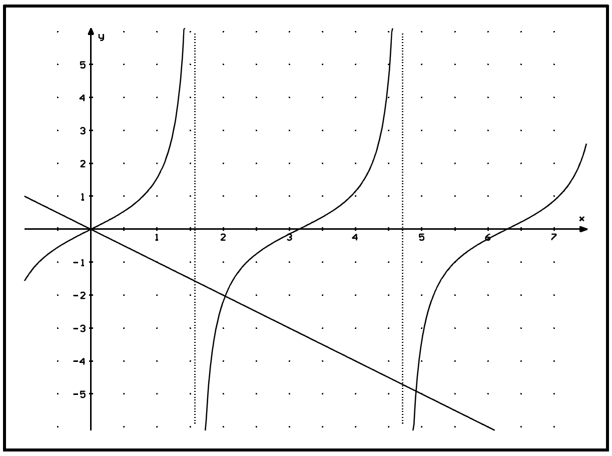
[21] Wenn der Startwert nicht sehr ungünstig gewählt wird, liefert das Newton-Verfahren i. Allg. in jedem Schritt eine Verbesserung um zwei Stellen.

Will man den (guten!) Startwert $x_1 = 2$ nicht über eine Wertetabelle ermitteln, hilft ein "Trick", der oft nutzbringend angewandt werden kann.

Gesucht war eine Lösung der Gleichung $\sin(x) + x \cdot \cos(x) = 0$. Diese Gleichung lässt sich für $\cos(x) \neq 0$ zur Gleichung $- x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ umformen.

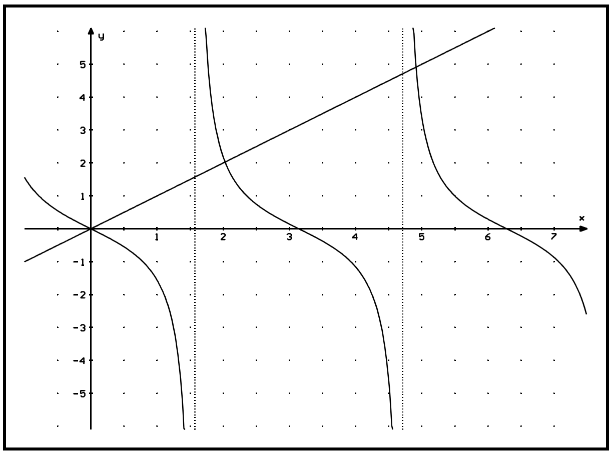
Da $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$, muss also die Gleichung **$- x = \tan(x)$** betrachtet werden.

Jede Lösung dieser Gleichung ist auch eine Lösung von **$\sin(x) + x \cdot \cos(x) = 0$** . Die Gleichung **$- x = \tan(x)$** ergibt sich, wenn man die Schnittstellen der durch "-x" und "tan(x)" definierten Funktionen bestimmen möchte. Die Graphen dieser beiden Funktionen sollten aber "Vokabeln" sein:



Dieser Zeichnung entnimmt man unmittelbar den Startwert $x_1 = 2$.

Die Gleichung $\sin(x) + x \cdot \cos(x) = 0$ kann natürlich auch zu $x = - \tan(x)$ umgeformt werden. Dann ergibt sich ein guter Startwert für das Newtonverfahren aus der folgenden Graphik.



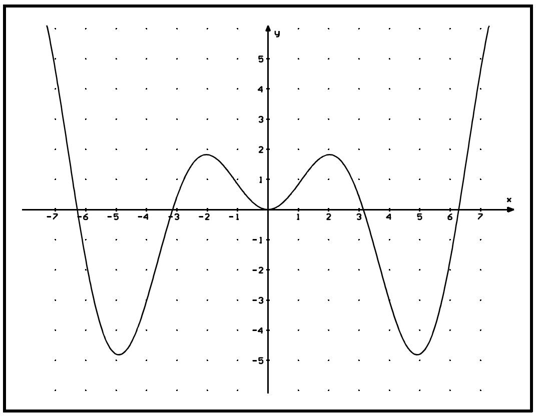
Wenn man keine Skizze des Graphen von f anfertigt und sich denkt, dass die Extremstelle ungefähr in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen 0 und π liegt, wird man das Newtonverfahren mit dem Startwert $x_1 = 1{,}5$ beginnen:
Zeige, dass sich dann die Näherungswerte $x_2 \approx 2{,}315$;
$x_3 \approx 2{,}096$ und $x_5 \approx 2{,}030$ ergeben, wenn jeweils mit den auf drei Nachkommastellen gerundeten Werten weiter gerechnet wird.
(Hier ist der Rechenaufwand hoch, da der erste Schätzwert weit vom exakten Wert entfernt ist.)

Abschließend soll untersucht werden, wie der Graph von f "global" (globus, lat. = Kugel) aussieht.

Da sich sowohl "x" als auch "sin(x)" zum Ursprung punktsymmetrische Graphen definieren, muss der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse sein. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x) \cdot \sin(-x) \\ &= -x \cdot (-\sin(x)) \\ &= x \cdot \sin(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Aus der Achsensymmetrie folgt, dass der Graph von f auch bei (- 2,029 / 1,82) einen Hochpunkt haben muss. Den beiden vorherigen Graphen entnimmt man, dass ungefähr an der Stelle 5 ein Tiefpunkt liegen muss. Auf die Berechnung der Wendepunkte verzichten wir an dieser Stelle aus Zeitgründen.



Aufgabe 74:

a) Zeige, dass durch $F(x) = \sin(x) - x\cdot\cos(x)$ eine Stammfunktion von f ($f(x)=x\cdot\sin(x)$) definiert wird.

b) Gib unter Benutzung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung einen Schätzwert für den Inhalt der Fläche an, die der Graph von f im Intervall [0/π] mit der x-Achse einschließt.

c) Berechne diesen Inhalt exakt.

Aufgabe 75: Gegeben ist f durch $f(x) = x \cdot \cos(x)$.

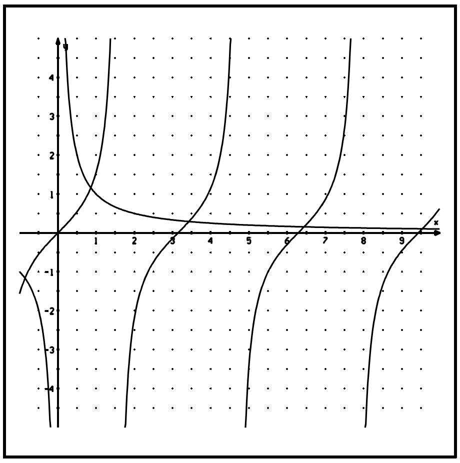
a) Untersuche den Graphen von f auf Symmetrie.

b) Bestimme alle Nullstellen im Intervall [- 9 / 9].

c) Zeige, dass $f''(x) = -2 \cdot \sin(x) - x \cdot \cos(x)$ gilt.

c) Begründe, dass sich die Stellen waagerechter Tangenten als Lösungen der Gleichung $\frac{1}{x} = \tan(x)$ ergeben.

d) Ermittle aus der rechts dargestellten Graphik Näherungswerte für die positiven Stellen mit waagerechter Tangente im Intervall [0/9]. Berechne unter einmaliger Verwendung des Newton-Verfahrens einen Näherungswert für die kleinste positive Stelle, an der der Graph von f eine waagerechte Tangente hat.
Gib an den berechneten Stellen die Funktionswerte von f an (auf zwei Nach-kommastellen runden).



e) Begründe, in welchen Teilintervallen von [0/9] f positive bzw. negative Funktionswerte hat.

f) Skizziere den Graphen von f im Intervall [- 1,5 / 9], ohne weitere Funktionswerte zu berechnen.

Aufgabe 76:

Gegeben ist f durch $f(x) = (\sin(x))^2$. [22]

a) Bestimme $f'(x)$ unter Benutzung der Kettenregel und anschließend unter Benutzung der Produktregel.

b) Untersuche den Graphen von f auf Symmetrie.

c) Gib alle Nullstellen im Intervall [- 7 / 7] an.

d) Bestimme im unter c) angegebenen Intervall die Stellen **absoluter** Extremwerte, ohne die Ableitung von f zu benutzen (=ohne Mittel der Differentialrechnung).
Bestätige diese Ergebnisse unter Benutzung von f' und f'' .

e) Bestimme die Wende**punkte** des Graphen im Intervall [- 7/7]. (Auf eine Bestätigung unter Benutzung von f''' kann verzichtet werden.)

f) Skizziere den Graphen von f im Intervall [- 1 / 7] und gib unter Benutzung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung einen Schätzwert für den Inhalt der Fläche an, die der Graph von f im Intervall $[0/2\pi]$ mit der x-Achse einschließt.

g) Zeige, dass durch $F(x) = 0{,}5x - 0{,}5\sin(x)\cdot\cos(x)$ eine Stammfunktion von f definiert wird. (Hinweis: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.)
Bestimme nun den Inhalt der Fläche aus Aufgabenteil f) exakt.

---

[22] Für $(\sin(x))^2$ schreibt man auch abkürzend $\sin^2(x)$. Diese Funktion muss im Zusammenhang mit der Leistung von Wechselstrom betrachtet werden und findet auch in der Theorie der Atommodelle eine wesentliche Anwendung!

$$f(x) = 2\cos^2(x) - \sin(x) - 0{,}5$$

Die Nullstellen ergeben sich als Lösungen der Gleichung $\mathbf{2\cos^2(x) - \sin(x) - 0{,}5 = 0}$.

Wegen $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ folgt:

$2(1 - \sin^2(x)) - \sin(x) - 0{,}5 = 0$.

Mit Hilfe der Substitution $\sin(x) = u$ und Anwendung der p-q-Formel erhält man die Lösungen:

$x_{N_1} \approx -3{,}851$; $x_{N_2} \approx 0{,}709$; $x_{N_3} \approx 2{,}432$.

(Wegen der Periodizität der Funktion f gibt es unendlich viele Nullstellen. Dieses Problem soll hier aber nicht weiter untersucht werden.)

Die Nullstellen lassen sich auch näherungsweise durch Anwendung des newtonschen Näherungsverfahrens bestimmen:

x	f(x)
-4.0000	-0.4023
-3.0000	1.6013
-2.0000	0.7557
-1.0000	0.9253
0.0000	1.5000
1.0000	-0.7576
2.0000	-1.0629
3.0000	1.3191

Die Wertetabelle zeigt, dass im Intervall [- 4 / - 3] wegen des Vorzeichenwechsels der Funktionswerte (wenigstens) eine Nullstelle liegen muss. Der Startwert $x_1 = -4$ [23] liefert den Näherungswert

$$x_2 = -4 - \frac{2\cdot\cos^2(-4) - \sin(-4) - 0{,}5}{-4\cos(-4)\sin(-4) - \cos(-4)} \quad \text{; also}$$

$$x_2 = -4 + \frac{2\cdot\cos^2(-4) - \sin(-4) - 0{,}5}{4\cos(-4)\sin(-4) + \cos(-4)}$$

(Zu viele Minuszeichen sorgen nur zu Flüchtigkeitsfehlern.)

Der TR (RAD-Modus!!!) liefert: $x_2 = -3{,}847...$ (dies ist, auf zwei Nachkommastellen gerundet, bereits der korrekte Wert).

($f'(x) = -4\cos(x)\sin(x) - \cos(x)$ erhält man mit Hilfe der Kettenregel oder auch (komplizierter) über die Produktregel.)

---

[23] Wählt man den Startwert $x_1 = -3$ liefert das Newton-Verfahren keinen Näherungswert für die im Intervall [- 4 / - 3] liegende Nullstelle. Da die Funktionswerte nahe legen, dass die Nullstelle näher am Wert - 4 als am Wert - 3 liegt, wird man aber hoffentlich mit $x_1 = -4$ starten.

Relative Extremwerte können nur an Stellen mit waagerechten Tangenten vorliegen. Diese Stellen sind Lösungen der Gleichung **- 4cos(x)sin(x) - cos(x) = 0** , die man zweckmäßig zu cos(x) · (4·sin(x) + 1) = 0 äquivalent umformt.

Waagerechte Tangenten liegen also an den Stellen, für die **cos(x) = 0** oder **sin(x)=- 0,25** gilt. Beschränken wir uns auf die Betrachtung des Graphen im Intervall [- 4 / 2], liefert die Gleichung

cos(x) = 0 die Lösungen $x_{E_1} = -\frac{\pi}{2}$ und $x_{E_2} = \frac{\pi}{2}$.[24]

Der TR liefert $x_{E_3} \approx - 0{,}253$ als weitere Stelle mit waagerechter Tangente.[25]

Durch F(x) = cos(x)·(1 + sin(x)) + 0,5x wird eine Stammfunktion F von f definiert. Dies lässt sich durch Ableiten bestätigen [26] :

1. Möglichkeit (Produktregel):

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= - \sin(x)\cdot(1 + \sin(x)) + \cos(x)\cdot\cos(x) + 0{,}5 \\
&= - \sin(x) - \sin^2(x) + \cos^2(x) + 0{,}5 \\
&= - \sin(x) - (1 - \cos^2(x)) + \cos^2(x) + 0{,}5 \\
&= - \sin(x) - 1 + \cos^2(x) + \cos^2(x) + 0{,}5 \\
&= 2\cos^2(x) - \sin(x) - 0{,}5
\end{aligned}
$$

2. Möglichkeit
Kettenregel und Benutzung von sin(2x) = 2sin(x)cos(x) sowie cos(2x) = 1 - 2sin ^{2}(x):

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \cos(x) + \cos(x)\sin(x) + 0{,}5x \\
&= \sin(x)\cos(x) + \cos(x) + 0{,}5x \\
&= 0{,}5\sin(2x) + \cos(x) + 0{,}5x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= 0{,}5\cos(2x)\cdot 2 - \sin(x) + 0{,}5 \\
&= \cos(2x) - \sin(x) + 0{,}5 \\
&= 1 - 2\sin^2(x) - \sin(x) + 0{,}5 \\
&= 1 - 2(1 - \cos^2(x)) - \sin(x) + 0{,}5 \\
&= 1 - 2 + 2\cos^2(x) - \sin(x) + 0{,}5 \\
&= 2\cos^2(x) - \sin(x) - 0{,}5
\end{aligned}
$$

---

24 Dies ist reines Vokabelwissen! Der Wert $-\frac{3\pi}{2}$ ist bereits kleiner als - 4 und daher kein Element aus dem Intervall [- 4 / 2].

25 Man erinnert sich hoffentlich, warum dieser Wert so wenig von - 0,25 abweicht! Für positive x-Werte hat die Sinusfunktion erst wieder negative Funktionswerte, wenn x größer als π ist.

26 Mit Mitteln des Grundkurses, also mit unseren bisherigen Kenntnissen, ist es nicht möglich, die Funktionsgleichung für F zu ermitteln. (Dies überlassen wir den Menschen aus dem Leistungskurs.)

Nun lässt sich z.B. der Inhalt der Fläche berechnen, die der Graph von f im ersten Quadranten mit den beiden Koordinatenachsen bis zur ersten positiven Nullstelle x_{N_2} einschließt:

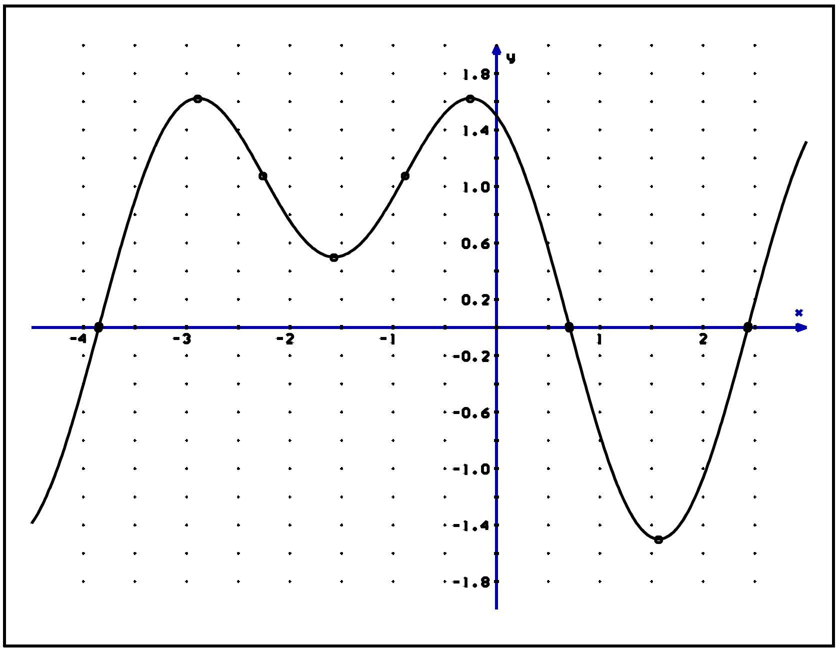
$$\int_0^{x_{N_2}} f(x)dx = [\cos(x) + \cos(x)\sin(x) + 0{,}5x]_0^{x_{N_2}}$$

$$= \cos(x_{N_2}) + \cos(x_{N_2})\sin(x_{N_2}) + 0{,}5\, x_{N_2} - (1 + 0 + 0)$$

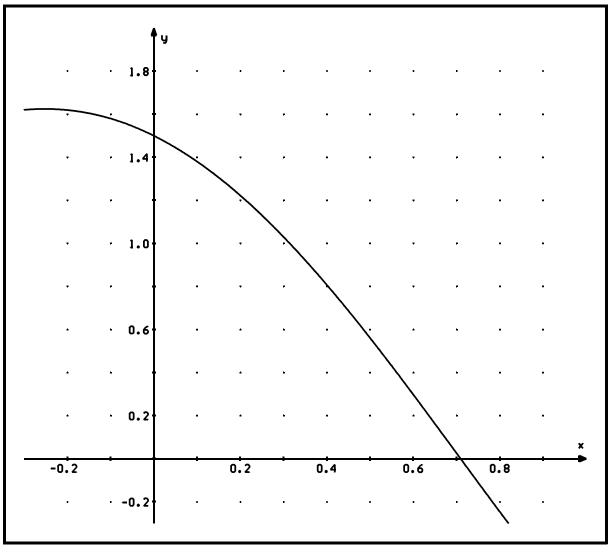
$$\approx \cos(0{,}709) + \cos(0{,}709)\sin(0{,}709) + 0{,}5 \cdot 0{,}709 - 1 \qquad (\approx 0{,}61)$$

Hoch- und Tiefpunkte	**Wendepunkte**
H(-2.89° 1.62; 0)	W(-3.85° 0.01; 2.74)
T(-1.57° 0.50; 0)	W(-2.26° 1.08;-1.33)
H(-0.25° 1.62; 0)	W(-0.88° 1.08; 1.33)
T(1.57°-1.50; 0)	W(0.70° 0.01;-2.74)

Mit einer Wertetabelle für die "wesentlichen" Punkte erhält man den Verlauf des Graphen von f im Intervall [- 4 / 2]:

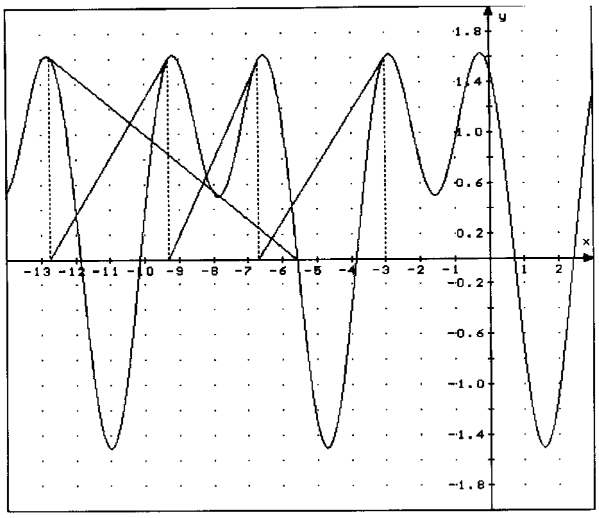


Der Wendepunkt W_4 liegt "minimal" links von der Nullstelle x_{N_2} ! Die Computergraphik kann dies bei dem gewählten Maßstab hier nicht veranschaulichen, so dass der Schnittpunkt mit der x-Achse und der Wendepunkt W_4 scheinbar zusammenfallen.



Links ist noch einmal ein Ausschnitt des Graphen von f dargestellt.

Aufgabe:
Gib unter Benutzung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung und der Graphik einen Schätzwert für $\int_0^{x_{N_2}} f(x)dx$ an und bestätige damit den Näherungswert auf der vorigen Seite.



Aufgabe:

Erläutere die links dargestellte Graphik.

(Tipp: Newton-Verfahren.)

Auf der nächsten Seite soll gezeigt werden, wie leicht (schnell) sich die vorangegangenen **Rechnungen** mit dem Programm "derive" erledigen lassen.[27]

[27] Wenn **jedes** Mitglied dieses Kurses über das Programm verfügen würde, ließe sich Mathematik sinnvoll "in einer ganz anderen Etage betreiben", wenn man nicht hofft, "dass dann alles viel leichter wird". (Die Gedankenarbeit nimmt das Rechenprogramm niemandem ab!)
Im Abitur 2002 haben übrigens erstmalig drei Abiturienten der HHO im **4. PF** Mathematik eine Prüfungsaufgabe unter Benutzung von *derive* bewältigt.

Newtonverfahren: f(x) = 2cos(x)^2-sin(x)-0.5

n	x(n)	f(x(n))
0	-3.00000000	1.60129029
1	-6.71389904	1.56887446
2	-9.29056262	1.59800105
3	-12.76018358	1.61841091
4	-5.57662892	7.81251800 E-03
5	-5.57377325	1.19594915 E-07
6	-5.57377321	2.63753464 E-11
7	-5.57377321	-2.72848411 E-12

Datei: ???.mth Datum: 02.07.2001 Zeit: 18:36:27

#1:	$2\cdot\mathrm{COS}(x)^2 - \mathrm{SIN}(x) - 0.5 = 0$	Benutzer
#2:	[x = -3.85100]	0.1s Löse(#1,x)
#3:	[x = 0.709412]	0.1s Löse(#1,x)
#4:	[x = 2.43218]	0.1s Löse(#1,x)
#5:	$\frac{d}{dx}\left(2\cdot\mathrm{COS}(x)^2 - \mathrm{SIN}(x) - 0.5\right)$	Dif(Benutzer,x)
#6:	$-\mathrm{COS}(x)\cdot(4\cdot\mathrm{SIN}(x) + 1)$	0.1s Vereinfache(#5)
#7:	$\int \left(2\cdot\mathrm{COS}(x)^2 - \mathrm{SIN}(x) - 0.5\right)\, dx$	Integral(Benutzer,x)
#8:	$\mathrm{COS}(x)\cdot(\mathrm{SIN}(x) + 1) + \frac{x}{2}$	0.1s Vereinfache(#7)
#9:	$\int_0^{0.7094} \left(2\cdot\mathrm{COS}(x)^2 - \mathrm{SIN}(x) - 0.5\right)\, dx$	Integral(Benutzer,x)
#10:	0.607687	0.1s Approximiere(#9)
#11:	$-\mathrm{COS}(x)\cdot(4\cdot\mathrm{SIN}(x) + 1) = 0$	Benutzer
#12:	[x = 3.39427]	0.1s Löse(#11,x)
#13:	[x = -2.88891]	0.1s Löse(#11,x)
#14:	[x = -0.252677]	0.1s Approximiere(Benutzer)

Eine Abituraufgabe im Original

(40% des Gesamtumfangs; das entspricht 72 Minuten Bearbeitungszeit)

Gegeben ist f durch **$f (x) = 1 - \sin (x) + 2 \cdot \cos (0{,}5 \cdot x)$** .

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse und geben Sie die Steigung in diesem Punkt an.

b) Bestätigen Sie, daß der Graph an der Stelle $x = \pi$ einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente hat. Bestimmen Sie die y-Koordinate dieses Wendepunkts.

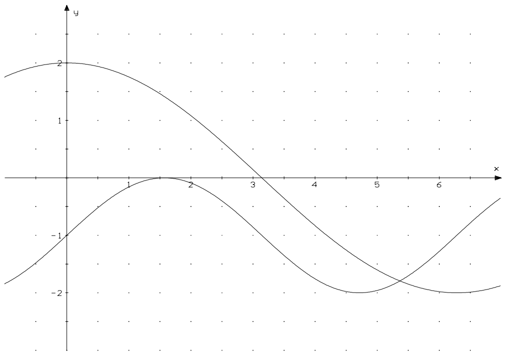
c) Skizzieren Sie die zu g (**$g(x) = -1 + \sin (x)$**) und h (**$h(x) = 2 \cos (0{,}5x)$**) gehörenden Graphen in demselben Koordinatensystem für $x \in [0 / 2\pi]$ und begründen Sie, dass der Schnittpunkt dieser beiden Graphen die in $[0 / 2\pi]$ liegende Nullstelle von f liefert. Lesen Sie nun aus Ihrer Skizze einen Näherungswert für diese Nullstelle ab.

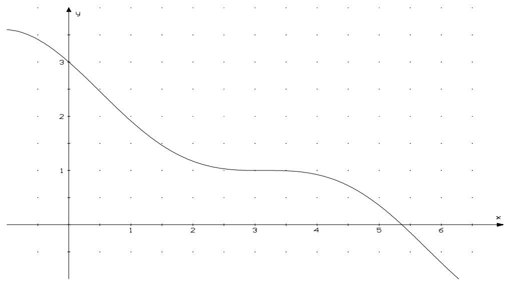
d) Skizzieren Sie nun unter Berücksichtigung der in a) bis c) ermittelten Ergebnisse einen möglichen Verlauf des Graphen von f im Intervall $[0 / 2\pi]$. (Sie dürfen davon ausgehen, dass der Graph in diesem Intervall keinen relativen Extremwert hat.)

e) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph (bis zu der oben ermittelten Nullstelle) mit den Koordinatenachsen einschließt. (Rechnen Sie mit Ihrem Näherungswert!)

Anmerkung: Auf der nächsten Seite ist der sogenannte Erwartungshorizont dargestellt, in dem vom Aufgabensteller die Lösungen angegeben werden müssen und erläutert wird, was im Wesentlichen im Unterricht behandelt wurde. Die Einordnung in die Anforderungsbereiche (ABI, ..) gibt den Schwierigkeitsgrad an, wie er vom Aufgabensteller eingeschätzt wird.

Aufgabe	Erwartete Teilleistung	AB	BE	Didakt. Kommentar
3a	$f(0) = 3$; $P(0/3)$ $f'(x) = -\cos(x) - \sin(0{,}5x)$ $f'(0) = -1$	I II I	1 3 1	
3b	$f''(x) = \sin(x) - 0{,}5\cos(0{,}5x)$ $f'''(x) = \cos(x) + 0{,}25\sin(0{,}5x)$ Da $f''(\pi) = 0$ und $f'''(\pi) = -0{,}75 \neq 0$ gilt, muss an der Stelle π ein Wendepunkt liegen. Wegen $f'(\pi) = 0$ liegt dort auch eine waagerechte Tangente. $f(\pi) = 1$; $W(\pi / 1)$	II II I I I	2 2 3 1 1	

3c	 -1 + sin (x) = 2cos(0,5x) ist äquivalent zu 1 - sin (x) + 2cos(0,5x) = 0. Angabe eines Wertes aus [5 / 5,75] .	I I II I	3 3 4 3	Bei der Behandlung trigonometrischer Funktionen in ma-1 wurde darauf hingewiesen, daß das Anfertigen von Graphen in diesem Schwierigkeitsbereich zum “Vokabelwissen” gehört, da auch schon in Klasse 11 entsprechende Problemstellungen behandelt wurden. Deswegen werden beide Graphen auch mit je 3 BE in AB I eingeordnet. Das näherungsweise Lösen einer Gleichung über ein Schnittproblem wurde in ma-2 am Beispiel (x-1)lnx behandelt (näherungsweise Bestimmung der Stellen mit waagerechten Tangenten). Insofern ist das Verfahren nicht neu. Dennoch stellt dies für GK-Schüler eine erhebliche Schwierigkeit da, da auch keine weiteren Übungen erfolgten. (Am Rand zu AB III. Siehe auch den Kommentar im didakt. Kommentar zu A1.) Es geht hier nicht um einfaches Ablesen: Wahrscheinlich ist, daß die Schüler die x-Achse in Vielfachen von π skalieren!

3d		II	5	Es soll hier auch ein Graph akzeptiert werden, der nur **einen** Wendepunkt bis zum Sattelpunkt aufweist. (Also: Es wird nicht eine absolut korrekte Darstellung des Krümmungsverhaltens erwartet.)
3e	$\int_0^{x_N} (1 - \sin(x) + 2\cos(0,5x))\,dx =$ $[x + \cos(x) + 4 \cdot \sin(0,5x)]_0^{x_N} \approx$ 6,7	I II I	1 3 4	 Die Rechnung kostet viel Zeit!

Aufgabe 77:
Gegeben ist die Funktion f durch f(x) = 2x + cos(2x).

Untersuche den Graphen auf Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrempunkte und Wendepunkte im Intervall [- 4 / 5]. Gib Näherungswerte für f(- 4) und f(5) an (Werte auf zwei Nachkommastellen runden) und skizziere den Verlauf des Graphen, ohne weitere Funktionswerte zu bestimmen, im Intervall [- 4 / 5].

Lösung:
Da f(1) ≈ 1,58 und f(- 1) ≈ - 2,42 , ist der Graph von f weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse.

f(0) = 1. Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt (0/1).

Da f(0) > 0 und f(- 1) < 0, muss im Intervall [- 1 / 0] eine Nullstelle vorhanden sein.
Da nicht ersichtlich ist, wie **2x + cos(2x) = 0** zur Nullstellenberechnung nach x aufgelöst werden kann, wird ein Näherungswert mit Hilfe des newtonschen Näherungsverfahrens bestimmt. Als Startwert wird - 0,25 gewählt, da die Nullstelle wegen f (- 1) ≈ - 2,42 und f(0)=1 wahrscheinlich näher am Wert 0 als am Wert - 1 liegt.

$$x_2 = -0{,}25 - \frac{f(-0{,}25)}{f'(-0{,}25)}$$

Wegen f´(x) = 2 - 2sin(2x) folgt

$$x_2 = -0{,}25 - \frac{-0{,}5 + \cos(-0{,}5)}{2 - 2\cdot\sin(-0{,}5)} \text{ ; also:}$$

$$x_2 \approx -0{,}25 - 0{,}13$$

$x_2 \approx -0{,}38$. (Anmerkung: Der exakte Wert für die Nullstelle ist $x_N = -0{,}3695...$)

Zur Untersuchung des Graphen auf Extrempunkte und Wendepunkte werden f´´ und f´´´ ermittelt:

f´´(x) = - 4cos(2x) ; f´´´(x) = 8sin(x).

Die Stellen waagerechter Tangenten des Graphen von f ergeben sich als Lösungen der Gleichung

$$2 - 2\sin(2x) = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\sin(2x) = 1$$

Da die Sinusfunktion an allen Stellen $(4n+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ (n ist eine ganze Zahl) den Funktionswert 1 hat, sind alle x_{En} mit $2x_{En} = (4n+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ (n ganzzahlig) Lösung dieser Gleichung.

Im angegebenen Intervall hat der Graph von f also an den Stellen $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{5\pi}{4}$ waagerechte Tangenten.

Wegen
$$\begin{aligned} f''\left(-\frac{3\pi}{4}\right) &= -4 \cdot \cos\left(-2 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= -4 \cdot \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und
$$\begin{aligned} f'''\left(-\frac{3\pi}{4}\right) &= 8 \cdot \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= 8 \end{aligned}$$

hat der Graph von f an der Stelle $-\frac{3\pi}{4}$ ($\approx -2{,}36$) einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente.

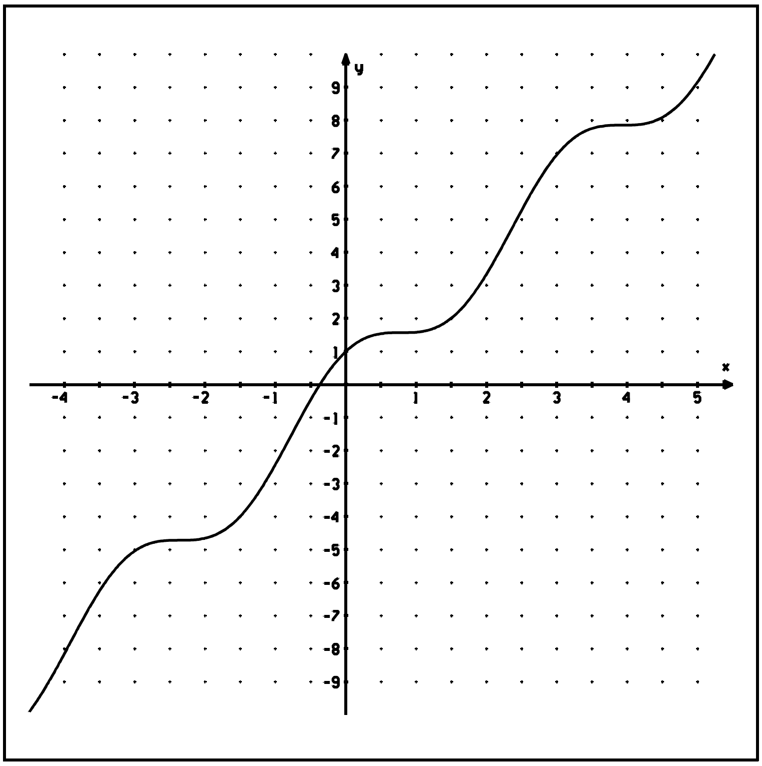
$$\begin{aligned} f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) &= 2 \cdot \left(-\frac{3\pi}{4}\right) + 2 \cdot \cos\left(-2 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= -\frac{3\pi}{2} + 2 \cdot \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{3\pi}{2} \\ &\approx -4{,}71 \end{aligned}$$

Entsprechend wird gezeigt, dass auch an den Stellen $\frac{\pi}{4}$ (≈ 0,79) und $\frac{5\pi}{4}$ (≈ 3,93) Wendepunkte mit waagerechten Tangenten vorhanden sind. (Trotz einiger waagerechter Tangenten gibt es also keine relativen Extrema!)

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$ (≈1,57) ; $f(\frac{5\pi}{4}) = \frac{5\pi}{2}$ (≈7,85) .

$f(-4) \approx -8{,}15$ $f(5) \approx 9{,}16$

Die Bestimmung der restlichen Wendepunkte wird der fleißigen Leserin überlassen.



Aufgabe 78:
Gegeben ist f durch f(x) = 2x - sin(2x).
a) Bestimme die ersten drei Ableitungen von f.
b) Untersuche den Graphen von f auf Symmetrie.
c) Zeige, dass der Graph waagerechte Tangenten, aber keine Extrempunkte hat.
d) Skizziere den Graphen im Intervall [- 7 / 7].

Aufgabe 79:
Gegeben ist f durch f(x) = x + cos(2x)
Untersuche den Graphen von f auf Symmetrie, relative Extrempunkte, Wendepunkte und skizziere den Graphen im Intervall [- 1/ 6].

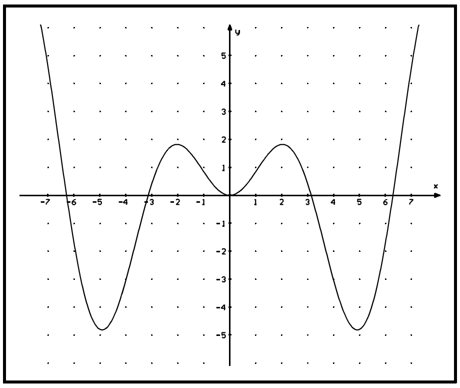
Aufgabe 80: Gegeben sind f und g durch f(x) = sin(x) und g(x) = cos(x).

a) Gib die ersten beiden positiven Schnittstellen der beiden Graphen an.
Wie groß ist der Inhalt der Fläche, die die beiden Graphen in diesem Intervall einschließen?

b) Die Parallele zur y-Achse, die durch “x=1” definiert wird, schneidet die beiden Graphen in zwei Punkten P und Q. Wie lang ist die Strecke PQ?

c) Die Parallele zur y-Achse (“x=a” ; $1 \leq a \leq 3{,}5$) schneidet die Graphen von f und g in P_a und Q_a. Für welches a ist die Strecke P_aQ_a am längsten?

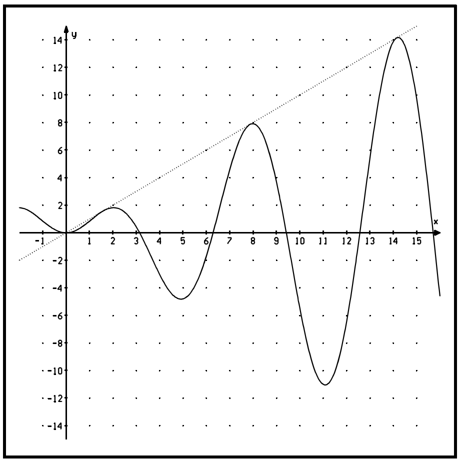
Aufgabe 81:



Dargestellt ist ein Ausschnitt des zu f(x) = x · sin(x) gehörenden Graphen.

Begründe, ohne Bezug auf f′ zu nehmen und ohne die Stelle x = 0 zu betrachten, warum die Kosinusfunktion offensichtlich nicht die Ableitung von f sein kann.

Aufgabe 82: Die im Bild dargestellte Gerade hat die Funktionsgleichung g(x) = x.



a) Warum kann diese Gerade den Graphen von f (f(x)=x·sin(x)) nicht in den Extrempunkten berühren? An welchen Stellen berührt die Gerade den Graphen von f ? Warum kann der Graph von f für positive x-Werte nie oberhalb des Graphen von g verlaufen?

b) Berechne die Steigung von f an der ersten positiven Berührstelle, die die Gerade und der Graph von f haben, mit Hilfe der Ableitung von f. Welche Steigung hat die Funktion an der ersten positiven Nullstelle? Bestimme die Gleichung der Tangente in diesem Punkt und zeichne sie im Graphen ein.

Zwei nützliche Sätze, die hier nicht gesondert bewiesen werden

Satz von der **Linearität des Integrals**:

$$\boxed{\int (k_1 \cdot f(x) + k_2 \cdot g(x))\,dx = k_1 \cdot \int f(x)dx + k_2 \cdot \int g(x)dx}$$

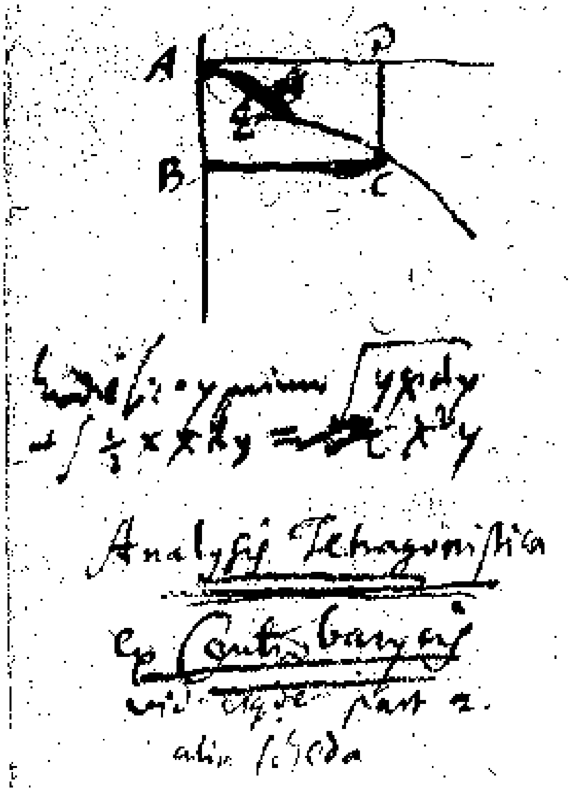
Man kann also Summen einzeln integrieren. Konstante Faktoren “interessieren wenig”, wenn man eine Stammfunktion sucht.
Man wendet diesen Satz zur Rechenersparnis gerne in der umgekehrten Richtung an:

Ist also beispielsweise $\int_{-3}^{5} (-2x^3 + 5x - 4)\,dx - \int_{-3}^{5} (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx$ zu berechnen, so lässt sich dieser Ausdruck vereinfachen:

$$\int_{-3}^{5} (-2x^3 + 5x - 4)\,dx - \int_{-3}^{5} (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \int_{-3}^{5} (-3x^3 + 4x^2 + 2x - 4)\,dx$$

Aus dem Hauptsatz folgt unmittelbar:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = -\int f(x)\,dx}$$



Randnotiz von Leibniz mit Integralzeichen, 1675

Die Entdeckung, dass die Ableitung einer Funktion und das Integrieren eng miteinander verknüpft sind (siehe S.19), ist Isaac Barrow (1630 - 1677), dem Lehrer Isaac Newtons (1642/3 - 1727) an der Universität Cambridge, zuzuschreiben.

Das Wort Integral wurde von den Brüdern Bernoulli vorgeschlagen. (Die schweizerische Familie der Bernoullis hat einen vergleichbar bemerkenswerten Stammbaum wie die Familie Bach. Emil Sinclair [28] war übrigens in erster Ehe mit einer Bernoulli verheiratet.)

$\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet man auch als **bestimmtes Integral**. Das bestimmte Integral ist eine reelle Zahl, wie sie auf Seite 6 definiert wurde.

$\int f(x)\,dx$ Unter dem **unbestimmten Integral** versteht man die **Menge aller Stammfunktionen** des Integranden. Für $f(x) = x^3$ ist also $\int f(x)\,dx$ die Menge aller Funktionen F mit der Funktionsgleichung $F(x) = 0{,}25x^4 + C$, wobei C irgendeine reelle Zahl ist.

Die Unterscheidung von unbestimmtem und bestimmtem Integral hat historische Gründe und braucht uns nicht zu interessieren, da wir zur Inhaltsbestimmung nur das von Herrn Riemann (es gibt in Kreuzberg eine Straße, die nach diesem Mathematiker des 19. Jahrhunderts benannt ist) stammende bestimmte (Riemannsche) Integral benötigen. Die Bezeichnung “unbestimmtes” Integral ist ohnehin verwirrend, da durch die obige Definition (die Menge aller...) dieser Begriff

28 An **dieser** Schule **muss** man diesen Herren kennen! Ab zum Lexikon (oder neumodisch ins Internet, das man bei uns umsonst haben kann), bevor man sich decouvriert!

eindeutig festgelegt, also bestimmt wurde.

Historische Anmerkung

Differential- und Integralrechnung sind gleichzeitig und in engster Verbindung miteinander im letzten Drittel des 17. Jahrhunderts entstanden. ISAAC NEWTON (1643-1727) entwickelte sie zuerst in den Jahren 1665/66, als er sich, um der Pest zu entgehen, auf das Land zurückgezogen hatte (weshalb manche sagen, daß sie der Pest zu verdanken seien).
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716) erfand sie neu und unabhängig von NEWTON, als er sich von 1672 bis 1676 als Diplomat in Paris aufhielt. Beide Männer zählen auf Grund dieser Leistung (die keineswegs ihre einzige war) zu den bedeutendsten Mathematikern, die bisher gelebt haben. NEWTON war in erster Linie Naturforscher. Er schuf mit seinem Hauptwerk "Philosophiae naturalis principia mathematica" (Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie, d. i. Naturwissenschaft) die Grundlagen der Physik und war schon zu seinen Lebzeiten ein berühmter Mann.
Von 1703 bis zu seinem Tode präsidierte er der Royal Society, die LEIBNIZ die angesehenste geistige Autorität Europas genannt hatte. Er wurde 1705 geadelt (Sir) und 1727 in der Westminster Abbey mit großen Ehren begraben.
Auf Grund seiner Vielseitigkeit hat man LEIBNIZ ein Universalgenie genannt. Er war Jurist, Diplomat, Historiker, Theologe, Sprachwissenschaftler, Geologe, Biologe, Physiker und hat auf allen diesen Gebieten Bedeutendes geleistet. Vor allem aber war er Philosoph und Mathematiker und anders als NEWTON auch ein geistvoller Mann von Welt, dem es gefiel, an europäischen Fürstenhöfen zu brillieren. LEIBNIZ war von seinen jüngsten Jahren an (seine erste philosophische Schrift publizierte er mit sechzehn Jahren) unermüdlich tätig, und bis heute ist noch längst nicht alles erschlossen, was sich in seinem riesigen schriftlichen Nachlaß findet. Obwohl er als umfassender Denker tiefe Spuren in der kulturellen und wissenschaftlichen Entwicklung hinterlassen hat, fand er zu seinen Lebzeiten nicht die Anerkennung, die ihm gebührt hätte. Von 1676 bis zu seinem Tode versah er beim Kurfürsten von Hannover und späteren König von England das Amt eines Rechtsberaters und Bibliothekars und starb 1716 völlig vereinsamt, ohne Familie und Freunde. "Wie einen Straßenräuber fast", so schrieb ein Zeitgenosse, "wurde der bedeutendste Gelehrte seinerZeit begraben".
Von NEWTON soll der Ausspruch stammen: "Wenn ich etwas weiter sah als andere, so deshalb, weil ich auf den Schultern von Riesen stand." In der Tat konnten sich NEWTON und LEIBNIZ auf eine lange Reihe von Vorgängern stützen, die sich um die gleichen Fragestellungen bemüht und zahlreiche wichtige Ergebnisse erzielt hatten. Die Erfindung der Differential- und Integralrechnung lag deshalb in der Luft, aber um in den vielfältigen, heterogenen Einzelheiten die gemeinsame Idee zu erkennen, bedurfte es des Genies eines NEWTONS oder LEIBNIZ'. Ihnen erst gelang es, die komplizierten geometrischen Überlegungen ihrer Zeitgenossen und ihre eher undurchsichtigen algebraischen Operationen auf einen einfachen Kalkül zu reduzieren, dessen Regeln leicht zu formulieren und leicht zu beherrschen waren. Damit schufen sie das mächtigste Instrument für die damals gerade entstehenden modernen Naturwissenschaften, und bis heute hat es diese Funktion behalten.

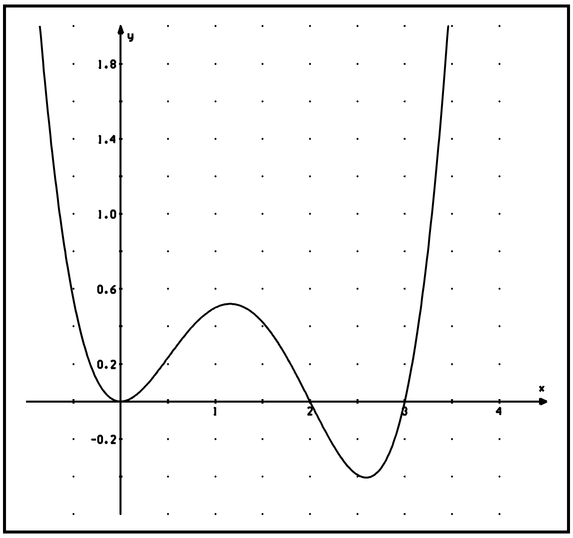
Der Übergang des Mittelalters zur Neuzeit ist durch eine radikale Neuorientierung des abendländischen Denkens gekennzeichnet. An die Stelle des alten, qualitativen, eng begrenzten und ausschließlich religiös bestimmten Weltbildes trat als Folge der gesellschaftlichen Entwicklung (Niedergang von Kaiser- und Papsttum, Aufblühen der Stadtstaaten in Italien mit weitreichendem Handel und einem vielgestaltigen Manufakturwesen) ein neues, quantitatives, außerordentlich erweitertes und im Prinzip säkulares Weltbild. Es wurde entscheidend von den Humanisten der Renaissance geformt, deren Selbstverständnis von dem Vertrauen in die Fähigkeit der menschlichen Natur geprägt war, von sich aus und ohne die göttliche Offenbarung die Welt zu erkennen. In der Folge wurde das autonome Denken zur führenden Kraft; das Erkenntnisinteresse des Menschen richtete sich auf sein Gegenüber, die Natur, und Naturerkenntnis wurde *das* Mittel zur Analyse der geistigen Vorgehensweisen auf dem Wege zur Erkenntnis: Philosophie und Naturwissenschaft verschmelzen miteinander.

Zugleich vollzieht sich ein grundlegender Wandel in den wissenschaftlichen Ideen, der so bedeutsam ist, daß man heute von einer evolution der Wissenschaft spricht. Einerseits greift man auf das Denken der Antike zurück, die als geistesverwandt empfunden und als vorbildlich angesehen wird und die es in allen Bereichen wiederzubeleben gilt (Renaissance); andererseits orientiert sich das auf das Diesseits gerichtete Interesse im Gegensatz zur Antike auch an den praktischen Bedürfnissen des Menschen wie der Herstellung von Geräten und Maschinen aller Art. Als Konsequenz verbinden sich antikes Wissen und abendländisches Handwerk, und aus dieser Verbindung entwickelt sich in Gestalt der theoretischen und zugleich experimentellen Mechanik, Optik, Statik allmählich die mathematisierende und experimentierende moderne Naturwissenschaft.

In der Mathematik übten besonders die Schriften von ARCHIMEDES (ca. 287-212 v. Chr.) einen großen Einfluß aus. Aber man begnügte sich nicht damit, sich das antike Wissen anzueignen, sondern war in heftigem Wetteifer darum bemüht, die Methoden weiterzuentwickeln und mit neuen Ergebnissen auch ein Denkmal seiner selbst zu setzen. Eine der weiterführenden Ideen stellten die sog. Indivisiblen dar, unteilbare und unendlich kleine Größen, die man sich als die Atome einer Fläche oder eines Körpers vorstellte. Daneben und nicht scharf von den Indivisiblen getrennt spielten andere infinitesimale Größen, sog. Infinitesimalien, eine bedeutende Rolle. Sie sollten "kleiner als jede angebbare Größe" sein, durften aber dennoch nicht verschwinden. Zum Beispiel wurde ein Kreis, wenn es zweckmäßig erschien, als ein Viereck mit infinitesimalen Seiten und unendlich vielen Ecken aufgefaßt. Man scheute sich auch nicht, die Tangente als eine Gerade zu ‚definieren", die zwei infinitesimal benachbarte Punkte miteinander verbindet, und ganz in demselben Sinne verstand man unter der Momentangeschwindigkeit eines Körpers die Geschwindigkeit, mit der er sich während eines infinitesimalen Zeitintervalls gleichförmig bewegt. Obwohl man sich darum bemühte, genauer zu sagen, was mit einer indivisiblen oder infinitesimalen Größe jeweils gemeint war, blieben diese Begriffe dennoch weitgehend unbestimmt. Daß man trotzdem an ihnen festhielt, beruhte einfach auf der Fruchtbarkeit der neuen Methoden, und man glaubte wohl auch (nicht mit Unrecht), daß man die Ergebnisse nach der strengen Art der Griechen "more geometrico" würde rechtfertigen können was, aber nur in Einzelfällen auch wirklich durchgeführt wurde). NEWTON und LEIBNIZ bildeten hier keine Ausnahme. Sie waren ganz Kinder ihrer Zeit, die mit dem revolutionären Aufbruch der Wissenschaft zugleich auch die statische Denkweise der Griechen überwunden hatte, in der es keinen Platz für Variable und Funktionen (beide Begriffe hat LEIBNIZ eingeführt) gab, sondern für die nur konstante Größen existierten.

Quelle: Kroll "Analysis" Dümmler-Verlag 1985 S.76 ff

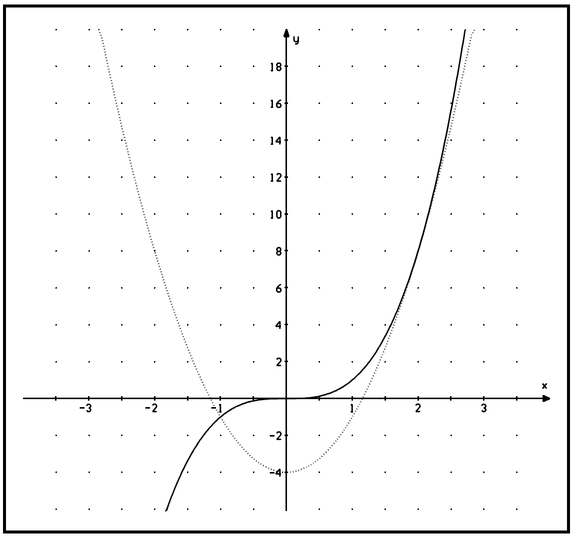
Übungen, mit denen man sich selbst kontrollieren kann



$$h(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 \cdot (x^2 - 5x + 6)$$

$$\int_0^2 h(x)\,dx = 0{,}6$$

$$\int_2^3 h(x)\,dx = -\frac{21}{80} \quad (= -0{,}2625)$$

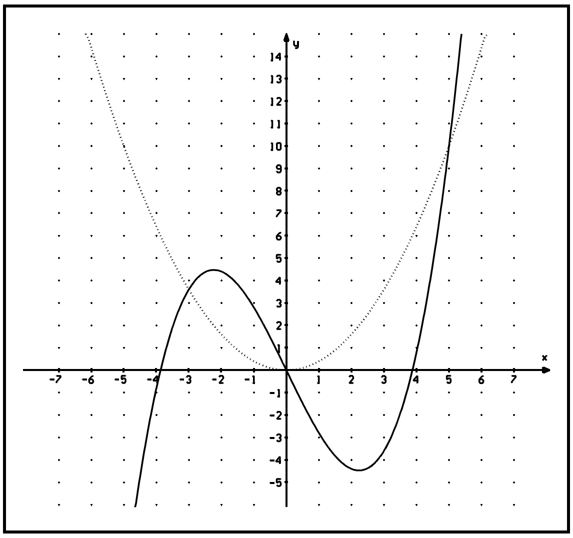


$f(x) = x^3$

$g(x) = 3x^2 - 4$

Schnittstelle: - 1 . Berührstelle: 2 .

$$\int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\,dx = \frac{27}{4}$$



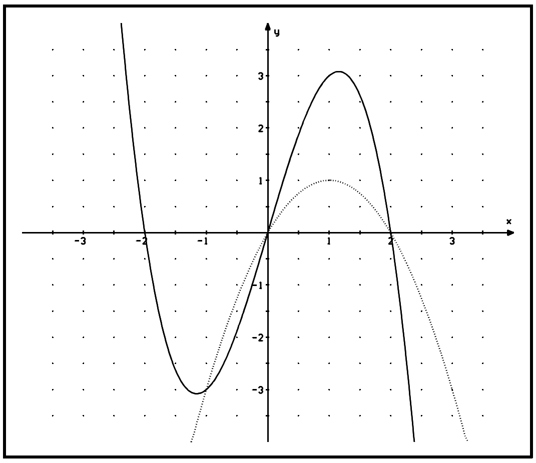
$f(x) = 0{,}2x^3 - 3x$

$g(x) = 0.4x^2$

Schnittstellen: - 3; 0 und 5 .

$$\int_{-3}^{0} (f(x) - g(x))dx + \int_{0}^{5} (g(x) - f(x))dx =$$

$$\frac{117}{20} + \frac{275}{12} \quad (\approx 28{,}77)$$



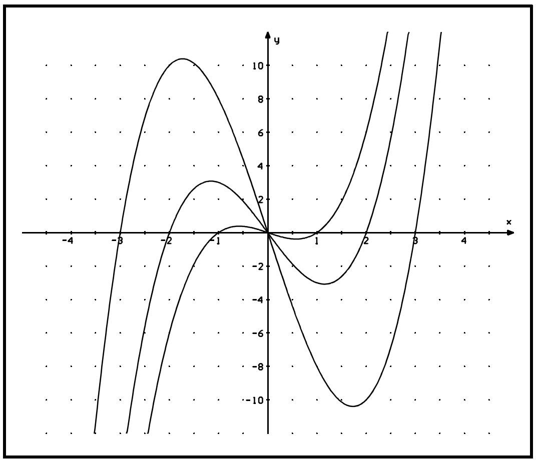
$f(x) = -x^3 + 4x$

$g(x) = -x^2 + 2x$

Schnittstellen: - 1 ; 0 und 2 .

$$\int_{-1}^{0} (g(x) - f(x))dx + \int_{0}^{2} (f(x) - g(x)) dx =$$

$$\frac{5}{12} + \frac{8}{3} \qquad \left(= \frac{37}{12} \approx 3{,}08 \right)$$



Die links dargestellten Graphen gehören zur Funktionenschar (f_a), die durch

$$f_a(x) = x^3 - a \cdot x$$

definiert ist. (Für jede reelle Zahl a erhält man eine bestimmte Funktion f_a der Schar.)
Man nennt a den **Parameter** der Funktion.

a) Berechne die Nullstellen von f_4 .

Berechne die Extrempunkte von f_9 .

b) Zu welchen Parametern gehören die oben dargestellten Graphen? (Es darf vorausgesetzt werden, dass die Parameter ganzzahlig sind.)

c) Für welche Parameter haben die Funktionen nur eine Nullstelle?
Berechne die Steigung von f_{-1} an der Stelle x = 0. Wie sieht der grundsätzliche Verlauf des Graphen von f_{-1} aus?

d) Berechne den Inhalt der Fläche, die der Graph von f_9 mit der x-Achse einschließt.

(Tip: Nutze die Punktsymmetrie des Graphen aus!)
Überprüfe das Ergebnis am Graphen.

e) Berechne $\int_0^{\sqrt{a}} (x^3 - a \cdot x)\, dx$.

f) Welche anschauliche Bedeutung hat der Wert $-2 \cdot \int_0^{\sqrt{a}} (x^3 - a \cdot x)\, dx$, wenn a positiv ist?

g) Für welchen Parameter schließt der Graph von f_a mit der positiven x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt 64 ein?

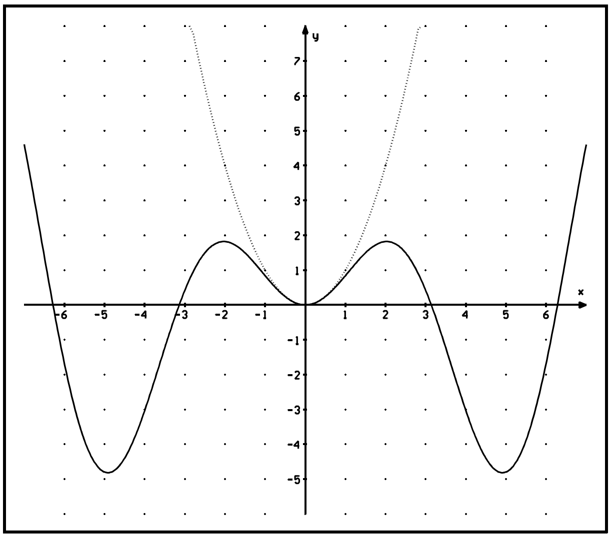
h) Zeige, dass der Graph für **negative** Parameter die x-Achse nur im Ursprung schneidet.

Zur Kontrolle:

$$\int_0^{\sqrt{a}} (x^3 - a \cdot x)\, dx = -\frac{a^2}{4}$$

Beachte, dass das obige Integral nur für positive Parameter definiert ist.

Die Lösungen zu den folgenden drei Aufgaben finden Sie im Anschluss!



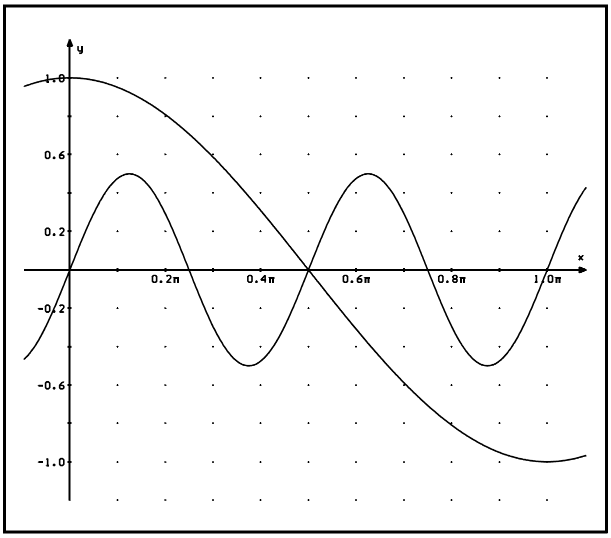
Links sind die Graphen der durch

f (x) = x · sin (x) und g (x) = x²

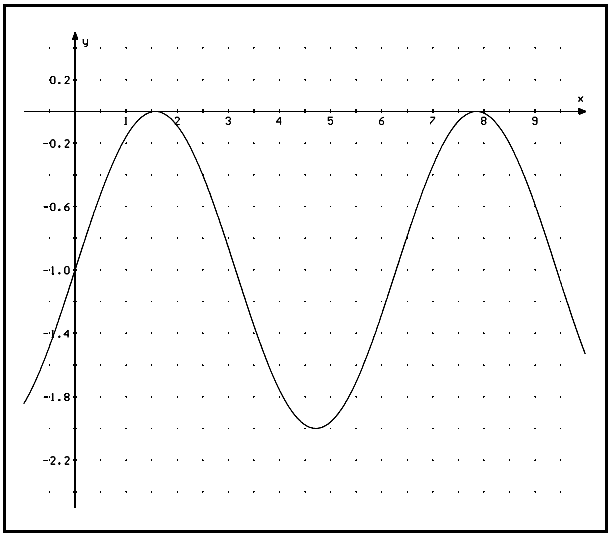
definierten Funktionen dargestellt.

Begründe, warum sich die Normalparabel dem Graphen von f "so schön anschmiegt" .

Um wie viel Prozent weichen die Funktionswerte der beiden Funktionen an der Stelle 1 voneinander ab?



Berechne den Inhalt derjenigen Fläche, die von der y-Achse und den beiden Graphen bis zu ihrer ersten positiven Schnittstelle eingeschlossen wird.



Der links dargestellte Graph ist durch Verschiebung einer bekannten trigonometrischen Funktionen entstanden.

1. Gib die Funktionsgleichung an.
2. Berechne den Inhalt der Fläche, die der Graph mit den beiden Koordinatenachsen im vierten Quadranten einschließt.

Lösung 1

Für betragskleine x-Werte (also für x-Werte mit $|x| \approx 0$) wurde gezeigt, dass $\sin(x) \approx x$ gilt.
Zur Erinnerung:
Der Graph der Sinusfunktion stimmt in einer kleinen Umgebung des Ursprungs sehr gut mit der Tangente t (definiert durch $t(x)=x$) überein.
Aus $\sin(x) \approx x$ folgt aber unmittelbar: $x \cdot \sin(x) \approx x \cdot x$.
Also gilt für $|x| \approx 0$: $f(x) \approx x^2$ (Der Graph von g und der Graph von f lassen sich in einer kleinen Umgebung der Stelle Null praktisch nicht mehr voneinander unterscheiden.)

Die Frage lässt sich nicht eindeutig beantworten. Es geht aus der Fragestellung nicht hervor, welches der Grundwert ist: Soll also berechnet werden, um wie viel Prozent $1 \cdot \sin(1)$ von 1^2 abweicht oder umgekehrt um wieviel Prozent 1^2 von $1 \cdot \sin(1)$ abweicht?
Es gilt $f(1) \approx 0{,}8415$ und $g(1) = 1$.

Wegen $\frac{1}{0{,}8415} = 1{,}188...$ weicht g(1) also um ca. 19% von f(1) ab.

Dagegen ist f(1) um ca. 16% kleiner als g(1) .

Lösung 2

Dargestellt sind die Graphen der durch **$f(x)=\cos(x)$** und **$g(x)=0{,}5\cdot\sin(4x)$** definierten Funktionen.

Der gesuchte Flächeninhalt A ist gleich $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x))\,dx$.

$$\text{Es gilt also:}\quad A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx \,.$$

Es gilt nämlich $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0{,}5 \cdot \sin(4x)dx = 0$, da das im Intervall $[0/\frac{\pi}{4}]$ oberhalb der x-Achse liegende Flächenstück, das der Graph von g mit der x-Achse einschließt, genauso groß ist wie die im Intervall $[\frac{\pi}{4}/\frac{\pi}{2}]$ unterhalb der x-Achse liegende Fläche, die der Graph von g dort mit der x-Achse einschließt (als Rechenübung ist die explizite Integration empfohlen).

Also: $A = [\,\sin(x)\,]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad (= 1)$

Lösung 3

Offenbar gilt f(x) = sin(x) - 1 . (Man braucht nur die durch g(x) = - 1 definierte Parallele zur x-Achse einzuzeichnen.)

Die erste positive Nullstelle von f ist $\frac{\pi}{2}$. Da f im Intervall [0/ $\frac{\pi}{2}$] keine positiven Funktionswerte hat, gilt

$$
\begin{aligned}
A &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) - 1)\,dx \\
&= -\left[-\cos(x) - x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left[\cos(x) + x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - (\cos(0) + 0) \\
&= \frac{\pi}{2} - 1 \quad (\approx 0{,}57)
\end{aligned}
$$

(Dieser Wert ist mit der Graphik “verträglich”: Man kann sich die Fläche als Dreieck vorstellen.)

Inhaltsverzeichnis

Ableitung der Kosinusfunktion	S. 58f
Ableitung der Sinusfunktion	S. 58f
Abweichung, relativ bzw. absolut	S. 5
Achsensymmetrie	S. 85
Additionssatz	S. 11/12
Additivität des Integrals	S. 11
Amplitude	S. 57
äquidistante Unterteilung/Zerlegung	S. 2
arithmetisches Mittel	S. 2
äußere Funktion	S. 69/71
äußere Ableitung	S. 69
Barrow, Isaac	S. 101
Bernoulli	S. 101
bestimmtes Integral	S. 101
Bogenmaß	Pro 11f
Differenzenquotient	Pro 6
Flächen zwischen Kurven	S. 37-39
Frequenz	S. 57
Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz	S. 40
Gravitationsgesetz	S. 42
Gravitationsintegral	S. 42/43

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung S. 28-31

hinreichend	Pro 17
Historisches	S. 102
innere Funktion	S. 69
innere Ableitung	S. 69/71
Integral	S. 8
Integralfunktion	S. 17 / 21 / 22 / 25
Integrand	S. 17
Intervallschachtelung	S. 6
Kettenregel	S. 69
konvergente Folge	S. 6
Kosinusfunktion	Pro 13 / S. 56f
Kreisinhalt	S. 1
Leibniz, Gottfried Wilhelm	S. 8 / S. 102
Linearität des Integrals	S. 100
lokale Änderungsrate	S. 65
Maximum, relativ	Pro 17
Minimum, relativ	Pro 17
Mittelwertsatz der Integralrechnung	S. 46
Momentangeschwindigkeit	S. 58
monoton fallend, wachsend	S. 6
muss	Pro 18
notwendig	Pro 17
Newton, Isaac	S. 102
Newtonverfahren	Pro 10
obere Grenze	S. 17
Obersumme	S. 2 / 3
Periode	S. 57
p-q-Formel	Pro 16
Produktregel	S. 76f
Punktsymmetrie	S. 56 Fußnote

Riemann	S. 101
Scheitel einer Parabel	Pro 4
Schwingungsdauer	S. 57
Sekantensteigung	Pro 5
Sinclair, Emil	S. 101
Sinusfunktion	Pro 13/ S. 10 / S. 56f
Stammfunktion	S. 25 / 26
Tangentengleichung	Pro 9
Tangentensteigung	Pro 5,6
unbestimmtes Integral	S. 101
untere Grenze	S. 17
Untersumme	S. 2 / 3
Verkettung von Funktionen	S. 64f
Wendepunkt	Pro 19
Wurzelfunktion	Pro 8
Zerlegung	S. 3