Hermann-Hesse-Oberschule (Gymnasium)
Berlin Kreuzberg
Fachbereich Mathematik

Kurs ma - 2

$$e^{\ln(a)} = a$$

---

máthēma

= das Gelernte, die Kenntnis

mathematikói (μαθηματικοί), d. h. die durch Lernen Einsicht erlangt Habenden

mathēmatikos = lernbegierig

Wenn man den Lehrplan für diesen Grundkurs [1] studiert und mit dem vorliegenden Skript vergleicht, wird man feststellen, dass die Reihenfolge der Unterrichtsinhalte umgekehrt wurde. Der Lehrplan schreibt -außer eine Reihenfolge wird **ausdrücklich** vorgegeben- nicht vor, in welchem zeitlichen Ablauf die Inhalte eines Kurses zu unterrichten sind. Die hier gewählte Reihenfolge ist eine methodische Entscheidung:

- Unabhängig von der Länge eines Semesters soll gewährleistet sein, dass hinreichend viel (Übungs-) Zeit für die Themen Exponential- und Logarithmusfunktionen zur Verfügung steht, weil sich aus diesem Themenkreis vielfältig geeignete Aufgaben für das dritte Prüfungsfach Mathematik stellen lassen.

- Ableitungen von Potenzfunktionen wurden teilweise schon im 1. Semester behandelt.

- Die Ableitung inverser Funktionen wird immanent bei exp und ln behandelt.

- Das Thema “Lineare Gleichungssysteme” (LGS) ist unmittelbare Voraussetzung für den Stoff des Kurses ma-3. Aus meiner Sicht ist es vorteilhaft, wenn das Thema LGS und der Kurs ma-3 nur durch die Sommerferien getrennt sind und “Terminnöte” [2] durch einfache Stoffverschiebungen behoben werden können.

- Die allgemeine Formel für die Ableitung von Umkehrfunktionen wird im Zusammenhang mit (ln)´ nicht gebraucht [3] und wurde daher an das Ende verschoben.

Wie auch im Skript “ma-1“ wird davon ausgegangen, dass aus den anspruchsvolleren Aufgaben eine sinnvolle Auswahl getroffen wird. Dagegen habe ich große Bedenken, Einschränkungen bei “simplen” Übungsaufgaben zu machen.

Selbstverständlich kann keine der Aufgaben dieses Skripts (auch keine Aufgabe aus “Bigalke-Köhler” oder identische Aufgaben aus dem Zentralabitur eines Bundeslandes) Abituraufgabe sein. Hier müssen die Funktionsgleichung und/oder die Fragestellungen deutlich variieren.

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Herrn Baumann und Herrn Dr. Röding für “Rat und Tat” bedanken!

Berlin-Kreuzberg, Winter 2002 B. Große

[1] Siehe Seite E11 und Seite E12

[2] Kurzes Sommersemester und anschließendes langes Wintersemester

[3] Siehe Seite 42

Menschen zählen
zeitlebens wie ABC-Schützen:
eins, zwei … viele.
Die Natur zählt, etwa bei Zellteilungen,
anders: 400, 800, 1600, 3200 …
unendlich.
Wenn der Mensch nicht bald lernt,
naturgemäß zu zählen, sprich:
mit der Natur zu rechnen,
wird er ausgezählt.

Aus dem Essay “Unfähig zu zählen” von **Hoimar von Ditfurth** in “natur”2/1985.

Cartoon: © Hans Peter Murrmann

Aus: TIMSS und der Mathematikunterricht; Schroedel 1998

Im Sinne des Cartoons auf der letzten Seite, sollen in dieser Einleitung Inhalte wiederholt werden, die **Voraussetzung** für das Verständnis des folgenden Stoffes sind. Wie schon zu Beginn des Skripts "ma-1" angemerkt wurde, versteht es sich hoffentlich von selbst, dass man sich im Kurs ma-2 nicht vier Wochen lang bei Prozentrechnung (Klasse 8), Potenzrechnung und Logarithmen (Klasse 10) aufhalten kann. Da die Erfahrung aber gezeigt hat, dass für wenigstens 50% der Berliner (und wohl nicht nur dieser) Abiturienten Prozentrechnung ein Fremdwort ist (Um wie viel Prozent ist der Wert 3,65 kleiner als der Wert 5,63 ?), möchte ich hier Hilfestellung geben. Auch die fundamentalen Grundlagen über Logarithmen, am Ende der Klasse 10 oft etwas stiefmütterlich behandelt, werden hier zusammengefasst. Wenn man die drei folgenden Aufgaben (Standard im Schuljahr 1998/99 für die 10b) lösen kann, wird man die Einleitung in fünf Minuten überfliegen. Ansonsten empfehle ich Heimstudium zur Wiederholung. (Vielleicht ist die Lehrkraft des Kurses aber auch so nett/einsichtig und schenkt mal eine Doppelstunde Nachhilfeunterricht.)

Aufgabe 1:
Die Halbwertszeit von Cäsium 137 (^{137} Cs) beträgt 30 Jahre, die von Blei 210 (^{210} Pb) nur 22 Jahre. Nach wie vielen Jahren ist von beiden Stoffen die gleiche Menge vorhanden, wenn von ^{137} Cs die Anfangsmenge 15 g und von ^{210} Pb die Anfangsmenge 20 g vorhanden ist? Überprüfe das Ergebnis auch zeichnerisch.

Aufgabe 2:
Bei speziellen Untersuchungen der Schilddrüse wird dem Patienten radioaktives Jod verabreicht, dessen Verbreitung im Körper dann mit Hilfe von Strahlenmessgeräten verfolgt werden kann. Das Jod zerfällt so, dass die jeweils vorhandene Menge nach etwa acht Tagen auf die Hälfte zurückgeht. Nach wie vielen Tagen sind noch 10% (1‰) der Anfangsdosis vorhanden?

Aufgabe 3:
Mit zunehmender Entfernung von der Erdoberfläche nimmt der Luftdruck in der Atmosphäre ab. Dieser Zusammenhang zwischen Luftdruck und Höhe wird näherungsweise beschrieben durch die sogenannte barometrische Höhenformel:

$$p_h = p_0 \cdot 0{,}88^h$$

Dabei ist p_0 der Luftdruck an der Erdoberfläche und p_h der Luftdruck in h Kilometern über der Erdoberfläche.
Von einem Flugzeugkapitän wird ein äußerer Luftdruck von 342 hPa (Hektopascal) festgestellt, während der Luftdruck an der Erdoberfläche 1013 hPa beträgt. In welcher Höhe befindet sich das Flugzeug?

Gymnasium: Mathematik

B III c 13

Kl. 10, Exp. u. Log.-Fkt., Niveau II (OR)

Niveau II (Gymnasium)

Exponential- und Logarithmusfunktionen

OR: 15 Stunden

Lernziele	Lerninhalte	Hinweise
Den typischen Verlauf der Graphen von Exponentialfunktionen $exp_a : x \rightarrow a^x$ zu verschiedenen Basen skizzieren können.	Exponentialfunktionen und ihre Graphen: Zuordnungsvorschrift; Definitions- und Wertmenge; Umkehrbarkeit; typischer Verlauf.	Die Existenz von Potenzen mit irrationalen Exponenten ist über Graphen der Anschauung zu entnehmen. Die zugehörigen Potenzgesetze sollten ohne Begründung übernommen werden.
Die Graphen der Logarithmusfunktionen zu verschiedenen Basen skizzieren können.	Die Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.	
Die Gesetze $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$ $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$ kennen und eines dieser Gesetze für $a = 10$ begründen können.	Logarithmusgesetze	An logarithmisches Rechnen mit Hilfe von Tafeln ist nicht gedacht. Das geeignete Rechenhilfsmittel ist der Taschenrechner.
Exponentialgleichungen auflösen können.	Exponentialgleichungen, auch Umrechnungen von Logarithmen zu verschiedenen Basen.	
Einfache Anwendungsaufgaben zu exponentieller Zu- und Abnahme lösen können.	Anwendungsaufgaben.	

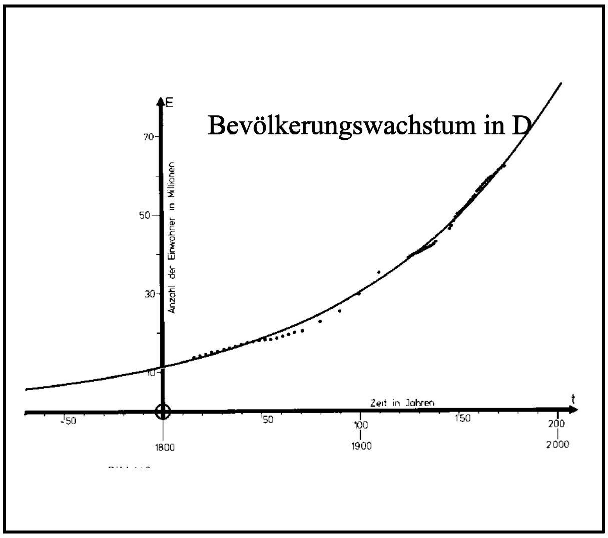
Ich gewinne im Toto 10 000 DM. Da mein Gehalt für den täglichen Bedarf ausreicht, zur Zeit keine größere Anschaffung ansteht (mein Auto ist erst gut zwei Jahre alt,…) und ich auch nicht ein Jahr Auslandsaufenthalt für meinen Filius finanzieren muss, lege ich das Geld zu 6% Zinsen für mehrere Jahre fest bei meiner Bank an. (Ich habe also nicht vor, in den nächsten Jahren das Grundkapital und die Zinsen anzugreifen: Man erkennt vielleicht, dass es sich hier um das Zinseszins"problem" handelt.)

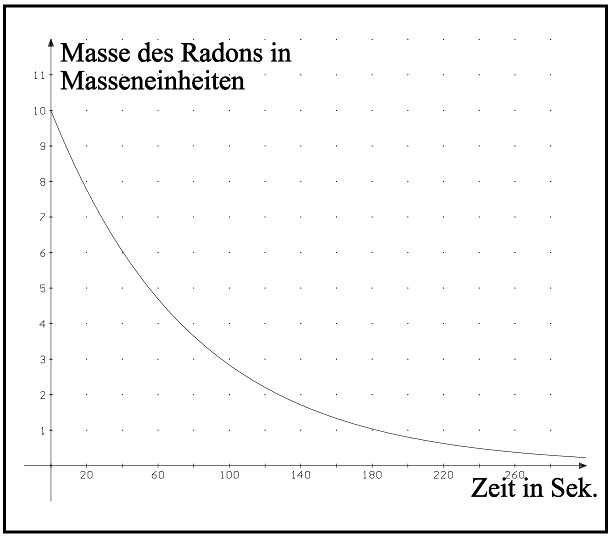
Wie wächst mein Kapital?

Nach einem Jahr habe ich 106% des Grundkapitals, das sich also mit dem Faktor 1,06 vergrößert hat.
Nach dem zweiten Jahr vergrößert sich dieses Kapital wiederum auf 106% des Kapitals, das ich nach einem Jahr hatte. (Das nach einem weiteren Jahr vorhandene Kapital vergrößert sich also wieder auf das 1,06fache.)
Insgesamt sind damit inzwischen $10\,000 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}06$ DM (= $10\,000 \cdot 1{,}06^2$ DM) auf dem Konto. Jedes Jahr multipliziert sich mein vorhandenes Kapital mit dem Wachstumsfaktor 1,06, so dass ich nach n Jahren Besitzer von $10\,000 \cdot 1{,}06^n$ DM bin, wenn mir nicht die Zinsabschlagssteuer einen Strich durch die Rechnung macht.
Das nach n Jahren vorhandene Kapital K(n) berechnet sich also mit Hilfe der Formel

$$\mathbf{K(n) = K_0 \cdot 1{,}06^n}$$

Analoge (ähnliche, entsprechende) Funktionsgleichungen erhält man, wenn man das ungestörte Wachstum einer Population betrachtet (natürlich nur über begrenzte Zeiträume), den Zerfall eines radioaktiven Stoffes untersucht (hier erhält man natürlich keinen Wachstumsfaktor, sondern einen Abnahmefaktor, der zwischen 0 und 1 liegt),…





Alle diese Vorgänge lassen sich mit Hilfe von Funktionen, die durch $f(x) = c \cdot a^x$ definiert sind, beschreiben. Man spricht deshalb bei derartigen Vorgängen von exponentiellem Wachstum bzw. exponentieller Abnahme (exponentiellem Zerfall).

Man überprüft mit dem Taschenrechner leicht, dass die beiden Graphen auf der vorigen Seite zu den Funktionsgleichungen

$$E(t) = 11{,}1 \cdot 10^6 \cdot 1{,}01^t \quad \text{und} \quad m(t) = 10 \cdot 0{,}9876^t$$

gehören.

Aufgabe E1:
Berechne E(100) und E(150) sowie m(30) und m(180). Vergleiche die Ergebnisse mit den Graphen.

Noch einmal: Alle diese Funktionsgleichungen haben die Form

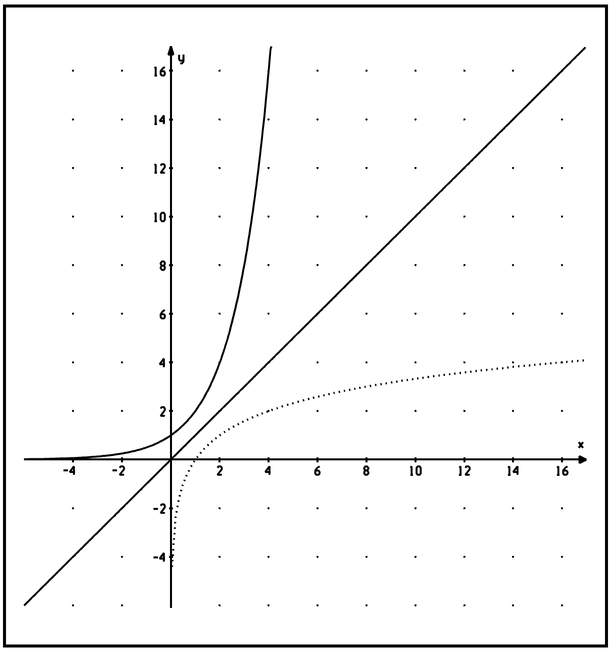
$$\mathbf{f(x) = c \cdot a^x} \,.$$

Alle Funktionen f, die durch
$f(x) = b^x \quad (b>0\,;\, b \neq 1)$
definiert sind, heißen Exponentialfunktionen.

Alle Funktionen f, die durch $f(x) = a \cdot b^x \quad (b>1\,;\, a>0)$
definiert sind, heißen **Wachstumsfunktionen**.
Man sagt dann auch: Die Funktionswerte von f wachsen exponentiell (**es liegt exponentielles Wachstum vor**).

Alle Funktionen, die durch $f(x) = a \cdot b^x \quad (0<b<1\,;\, a>0)$
definiert sind, heißen **Zerfallsfunktionen**.
(Es liegt exponentielle Abnahme vor.)

Anmerkung:
Es ist **nicht korrekt** (wie man es zum Beispiel in zwei gängigen Berliner Schulbüchern findet), Funktionen mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot b^x$ $(a \neq 1)$ als Exponentialfunktionen zu bezeichnen.



Das Bild links zeigt die Graphen der durch $f(x) = 2^x$ definierten Exponentialfunktion f und ihrer Umkehrfunktion $\log_2$.

Sofern für beide Koordinatenachsen **derselbe Maßstab** (siehe Anmerkung unten) gewählt wird, erhält man den Graphen von $\log_2$ durch Spiegelung des zu " 2^x " gehörenden Graphen an der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten.

Es gilt $\log_2 (16) = 4$, da $2^4 = 16$.
Es gilt $\log_2 (0,25) = -2$, da $2^{-2} = 0,25$.
Es gilt $\log_{10} (1000) = 3$, da $10^3 = 1000$.
Es gilt $\log_{10} (0,1) = -1$, da $10^{-1} = 0,1$.
Es gilt $\log_2 (1) = 0$ und $\log_{10} (1) = 0$.

Anmerkung: Als ich die obige Abbildung in diese Seite mit dem Computer einfügte, stellte ich fest, dass den 16 Einheiten auf der x-Achse 5,15cm und den 16 Einheiten auf der y-Achse 4,8cm entsprachen. Wie bin ich vorgegangen, um im Rahmen der Messgenauigkeit für beide Achsen denselben Maßstab herzustellen? (Hinweis: Das Computerprogramm zeigt mir auf Wunsch an, wie hoch und wie breit die Gesamtgraphik ist.)
Wenn man nicht weiß, wie man vorgehen soll, helfen vielleicht die nun folgenden Ausführungen über Prozentrechnung. **Dieser Rückblick auf die Prozentrechnung ist insbesondere notwendig, wenn wir uns dem ersten Thema dieses Kurses zuwenden: Wesentliche Eigenschaften der Wachstums- und Zerfallsfunktionen.**

$$0,35 = \frac{35}{100}$$

$$0,35 = 35\%$$

Die Zahl 3,58 ist **absolut** um den **Wert 0,5** größer als die Zahl 3,08.

Da $\frac{0,5}{3,08} \approx 0,16$, ist 3,58 **relativ** um ca. 16% größer als 3,08.

(16% von 3,08 sind ungefähr 0,5).

3,08 ist **absolut** auch um den **Wert 0,5** kleiner als 3,58.
3,08 ist aber **relativ** um ca. 14% kleiner als 3,58, da

$$\frac{0,5}{3,58} \approx 0,14$$

Allgemein:
Wenn ich wissen will, um wie viel Prozent der Wert a vom Wert b abweicht, berechne ich die **absolute Abweichung** $|a - b|$ (ich setze die Betragsstriche, weil a - b auch negativ sein kann) und beachte, dass nach der Abweichung **vom Wert b** gefragt wurde, **b** also der **Grundwert** ist:

$$\left| \frac{a - b}{b} \right|$$

gibt die relative Abweichung des Wertes a vom Wert b an.

(Der **Grundwert** steht im **Nenner**.)

Aufgabe E2:

a) Um wie viel Prozent (auf ganze Prozentsätze runden) ist 4,82 größer als 4,15? - Um wie viel Prozent ist 4,15 kleiner als 4,82?

b) Um wie viel Prozent ist 48,6 größer als 16,2? Um wie viel Prozent ist 16,2 kleiner als 48,6?

c) Es sei $f(x) = 2x - 4$.
Um wie viel Prozent ist f(1) größer als f(0)? Um wie viel Prozent ist f(4) größer als f(3)? Um wie viel Prozent ist f(50) größer als f(49)?

d) Es sei $g(x) = 3x^{-1}$.
Um wie viel Prozent ist g(4) kleiner als g(3)? Um wie viel Prozent ist g(5) kleiner als g(4)?.

e) Es sei $h(x) = x^2$.
Um wie viel Prozent ist h(1,2) größer als h(0,2)? Um wie viel Prozent ist h(2,2) größer als h(1,2)? Um wie viel Prozent ist h(- 0,5) kleiner als h(- 1,5)?

Nach diesem Rückblick auf die Prozentrechnung sollen noch einige Eigenschaften der Logarithmusfunktionen zusammengestellt werden und ein wesentliches Logarithmengesetz wiederholt werden, das uns eine wesentliche Hilfe bei den folgenden Rechnungen (und im vierten Semester) sein wird:

Jede Exponentialfunktion hat eine Umkehrfunktion. Diese Umkehrfunktionen heißen Logarithmusfunktionen.

Die zu **f(x) = a** ^{x} gehörende Umkehrfunktion heißt
Logarithmusfunktion zur Basis a und wird mit
$\mathbf{log}_{\mathbf{a}}$
bezeichnet.

Die zu $f(x) = 2^x$ gehörende Logarithmusfunktion (siehe Seite E7) wird üblicherweise mit **ld** bezeichnet, den Logarithmus zur Basis 10 bezeichnet man mit **lg** .

Da bei allen Exponentialfunktionen die Funktionswerte stets positiv sind, können die **Logarithmusfunktionen nur für positive x-Werte definiert** sein.

Alle Graphen von Logarithmusfunktionen enthalten den Punkt (1/0).
Ist die Basis a größer als 1, so ist $\log_a(x)$ für alle $x > 1$ positiv und für alle $x < 1$ (es muss natürlich auch $x > 0$ gelten) negativ.

Es gilt für alle positiven reellen Zahlen x:

$$\boxed{\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)}$$

Diese Formel gilt für alle Logarithmusfunktionen, doch genügt es, wenn man den Beweis für den "10er-Logarithmus" versteht (für andere Logarithmusfunktionen wird der Beweis völlig analog geführt):
Für irgendeine positive reelle Zahl x und eine reelle Zahl r ist auch $\lg(x^r)$ eine reelle Zahl.
Wir bezeichnen diese Zahl mit z. Dann gilt also: $\lg(x^r) = z$.
$\lg(x^r)$ ist nach Definition diejenige Zahl, mit der man 10 potenzieren muss, um x^r zu erhalten:

$$(*) \qquad 10^z = x^r$$

lg(x) ist diejenige Zahl y, mit der man 10 potenzieren muss, um x zu erhalten ($\lg(x)=y$):

$$10^y = x$$

Setzt man dies in Gleichung (*) ein, erhält man:

$$10^z = (10^y)^r \text{ bzw. } 10^z = 10^{y \cdot r}$$

Dann muss aber wegen der strengen Monotonie der Exponentialfunktionen
$$z = y \cdot r$$
gelten.

Also: $$\mathbf{lg(x^r) = lg(x) \cdot r}$$ ☺

Exponentialfunktion/Logarithmus
(30 Stunden)

Hinweise zum Lernabschnitt

— Die hier gewählte Reihenfolge von Lerninhalten stellt nur eine Möglichkeit des didaktischen Aufbaus dar. Bei der Wahl eines anderen Weges ist auf Gleichwertigkeit des Anspruchsniveaus zu achten.

— In diesen Lernabschnitt sind Anwendungsbezüge in besonderem Maße einzubetten.

— Für Funktionsuntersuchungen und Anwendungsaufgaben (vgl. die letzten beiden Lernziele) ist etwa die Hälfte der für diesen Lernabschnitt zur Verfügung stehenden Zeit vorzusehen.

Lernziele	Lerninhalte
Wissen, daß $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$ gilt (f differenzierbar; $f(x) \neq 0$).	Ableitung reziproker Funktionen. Hinweis: Die Ableitungsregel kann unter Anknüpfung an die Ableitung von x^{-1} mit Hilfe der Kettenregel gewonnen werden.
Die verallgemeinerte Potenzregel anwenden können.	Verallgemeinerung der Potenzregel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ auf $n \in Z \setminus \{0\}$.
Integrale der Form $\int_a^b x^{-n}\,dx$ berechnen können.	Integration von x^{-n} für $n \in N \setminus \{1\}$.
Eigenschaften von Exponentialfunktionen kennen und für graphische Darstellungen nutzen können.	Exponentialfunktion: Definitions-, Wertemenge; graphische Darstellung in Abhängigkeit von der Basis; Monotonie.
Exponentialfunktionen für beliebige Basen ableiten können.	Ableitung von Exponentialfunktionen; die Zahl e als ausgezeichnete Basis. Hinweis: Die Existenz der Ableitung an einer Stelle und die Existenz der Zahl e sollen der Anschauung entnommen werden.

Lernziele	Lerninhalte
Zu vorgegebenen Graphen die Graphen von Umkehrfunktionen zeichnen können.	Umkehrfunktion; zeichnerische Gewinnung aus vorgegebenen Funktionsgraphen; Logarithmus- und Exponentialfunktionen als gegenseitige Umkehrfunktionen; ln als ausgezeichnete Logarithmusfunktion.
Eigenschaften von Logarithmusfunktionen kennen.	Logarithmusfunktion: Definitions-, Wertemenge; graphische Darstellung in Abhängigkeit von der Basis; Monotonie.
Die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion kennen.	Ableitung der Umkehrfunktion. Hinweis: Existenzfragen sollen nicht problematisiert werden.
Wissen, daß $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ gilt.	Ableitung von ln; Integration von x^{-1}.
Anwendungsaufgaben lösen können.	Wachstum und Zerfall; u. a. Ermittlung von Funktionsgleichungen empirisch gewonnener Tabellen.
Funktionsuntersuchungen im Zusammenhang mit Exponential- und Logarithmusfunktionen durchführen können.	Kurvendiskussion; Beispiele wie: $x \longrightarrow x \cdot e^{-x}$, $x \longrightarrow \frac{\ln x}{x}$; dabei ist das jeweilige Grenzwertverhalten numerisch plausibel zu machen. Flächeninhaltsberechnungen mit Exponential- und Logarithmusfunktionen bei leicht bestimmbaren Stammfunktionen und ohne Integrationsmethoden.

Lineare Gleichungssysteme
(15 Stunden)

Hinweise zum Lernabschnitt

— In diesem Abschnitt sollen die Schüler lernen, in Verbindung mit Anwendungen lineare Gleichungssysteme mit m Gleichungen und n Variablen sicher zu lösen.

— Durch abwechslungsreiche Wahl von m und n soll die Bearbeitung einer Vielfalt von linearen Gleichungssystemen erreicht werden.

— Die Begriffe „Lineare Abhängigkeit" und „Lineare Unabhängigkeit" stehen für diesen Lernabschnitt nicht zur Verfügung.

— Der Gebrauch von Determinanten ist nicht vorgesehen.

Lernziele	Lerninhalte
Lineare Gleichungssysteme mit m Gleichungen und n Variablen (auch $m \neq n, m > 3, n > 3$) kennen und wissen, daß Lösungen n-Tupel sind.	Hinführung zu linearen Gleichungssystemen mit m Gleichungen und n Variablen über Anwendungsprobleme (Beispiele: siehe unten).
Den Gauß-Algorithmus kennen und lineare Gleichungssysteme mit seiner Hilfe lösen können.	Gauß-Algorithmus zur Erzeugung einer Dreiecksgestalt eines linearen Gleichungssystems mit m Gleichungen und n Variablen, auch für $m \neq n$. Elementarumformungen unter dem Aspekt, daß sich die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems nicht ändert: 1. Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Zahl. 2. Ersetzen einer Gleichung durch die Summe aus ihr und einem Vielfachen einer anderen Gleichung. 3. Vertauschung von zwei Gleichungen.

Lernziele	Lerninhalte
Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems angeben können.	Angabe der Lösungsmenge als Menge von n-Tupeln, dabei Berücksichtigung der drei Hauptfälle von leerer, einelementiger und mehrelementiger Lösungsmenge. Hinweis: Zwar soll dem Schüler bewußt gemacht werden, daß eine mehrelementige Lösungsmenge auf verschiedene Arten dargestellt werden kann, doch soll der Nachweis der Äquivalenz der Darstellungen nur exemplarisch erfolgen. Übungen, dabei auch eindeutig lösbare Gleichungssysteme mit $m = n = 4$.
Anwendungsaufgaben mit Hilfe von linearen Gleichungssystemen mathematisieren und lösen können.	Anwendungen. Beispiele: Verkehrsnetze, Materialverbrauch, Bestimmung von Funktionen zu vorgegebenen Bedingungen, Mischungsprobleme, Schnittmengen von Geraden im R^3.

Eigenschaften von Wachstums- und Zerfallsfunktionen

Wir untersuchen das Wachstum der durch $f(x) = 8 \cdot 1{,}05^{x}$ definierten Funktion:
Der Wachstumsfaktor 1,05 bewirkt, dass die Funktionswerte stets um 5% zunehmen, wenn sich die x-Werte jeweils um den Wert 1 vergrößern:
$f(0) = 8$.

$f(1) = 8 \cdot 1{,}05$. f(1) ist also um 5% größer als f(0)

$$\begin{aligned} f(2) &= 8 \cdot 1{,}05^{2} \\ &= 8 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \\ &= f(1) \cdot 1{,}05 . \end{aligned}$$

f(2) ist also um 5% größer als f(1)

$$\begin{aligned} f(7{,}4) &= 8 \cdot 1{,}05^{7{,}4} \\ &= 8 \cdot 1{,}05^{6{,}4+1} \\ &= 8 \cdot 1{,}05^{6{,}4} \cdot 1{,}05^{1} && \text{(so viel Potenzrechnung können wir noch, oder?)} \\ &= f(6{,}4) \cdot 1{,}05 . && \text{f(7,4) ist also um 5\% größer als f(6,4)} \end{aligned}$$

Aufgabe 4:
f sei wie oben definiert.
a) Zeige, dass auch f(- 3,1) um 5% größer als f(- 4,1) ist.
b) Bestätige, dass f(0,2) um 5% größer als f(- 0,8) ist.

Aufgabe 5:
Es sei $b > 1$, $a > 0$ und $f(x) = a \cdot b^{x}$.
Um welchen Wert ist f(5) absolut größer als f(4)?
Um wie viel Prozent ist f(5) größer als f(4)?
Um wie viel Prozent ist $f(x+1)$ größer als f(x)? ($x \in \mathbb{R}$ sei beliebig gewählt)

Aufgabe 6:
Es sei $f(x) = 5 \cdot 0{,}85^{x}$.
Um wie viel Prozent nehmen die Funktionswerte von f jeweils ab, wenn die x Werte um den Wert 1 zunehmen?

Aus den obigen Aufgaben ergibt sich unmittelbar folgende Vermutung für Wachstums- und Zerfallsfunktionen:

> Für alle Funktionen f , die durch $f(x) = a \cdot b^{x}$ $(a > 0;\ b > 1)$ definiert sind, gilt:
> $f(x+1)$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ um $(b - 1) \cdot 100\%$ größer als f(x).
>
> Für alle Funktionen f , die durch $f(x) = a \cdot b^{x}$ $(a > 0;\ 0 < b < 1)$ definiert sind, gilt:
> $f(x+1)$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ um $(1 - b) \cdot 100\%$ kleiner als f(x).

Zum Beweis beschränken wir uns auf den Fall $b > 1$:

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)} = \frac{a \cdot b^{x+1} - a \cdot b^{x}}{a \cdot b^{x}} \qquad \text{(a lässt sich kürzen)}$$

$$= \frac{b^{x} \cdot (b-1)}{b^{x}}$$

$$= b - 1$$

$$= (b-1) \cdot 100\% \qquad (100\% = 1) \quad .$$

Behauptung:
Alle Wachstumsfunktionen haben die Eigenschaft, dass die Funktionswerte stets um denselben Prozentsatz wachsen, wenn x jeweils um einen festen Wert (dieser muss nicht, wie in den vorangegangenen Beispielen, immer den Wert 1 haben) wächst.

Betrachten wir z.B. die folgende Wertetabelle (alle Funktionswerte sind auf zwei Nachkommastellen gerundet), die zu $f(x) = 4 \cdot 1{,}13^{x}$ gehört:

x	0,4	0,7	1	1,3	1,6	1,9	2,2
f(x)	4,20	4,36	4,52	4,69	4,86	5,05	5,23

Die x-Werte nehmen konstant um den Wert 0,3 zu, die Funktionswerte nehmen jeweils um knapp 4% zu. (Die Abweichungen ergeben sich durch die Rundungsungenauigkeiten.)

Aufgabe 7:
a) Beweise die oben aufgestellte Behauptung.
b) Wie lautet die entsprechende Behauptung für Zerfallsfunktionen?
Bestätige diese Behauptung für ein selbstgewähltes konkretes Beispiel.
Beweise diese Behauptung.

Aufgabe 8:
In einem Experiment wurde in gleichen zeitlichen Abständen gemessen, wie viel Milligramm eines bestimmten Medikaments sich im Körper eines Menschen befinden, der zu Beginn des Experiments eine Dosis von 20 mg zu sich genommen hatte. Die folgende Tabelle gibt die im Körper zum Zeitpunkt t (in Stunden gemessen) vorhandene Masse m(t) (in Milligramm gemessen) an:

t / h	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
m(t) / mg	20	19,32	18,66	18,02	17,41	16,82	16,24

Bestimme die halbstündige prozentuale Abnahme des Medikaments.

Problem:
Nach welcher Zeit befindet sich noch höchstens 1 mg des Medikaments im Körper?
Man könnte diese Frage beantworten, wenn die Funktionsgleichung der Funktion bekannt wäre, deren Funktionswerte zu jedem Zeitpunkt die Dosis angibt.

In den ersten drei Stunden werden in jeder halben Stunde rund 3,4% der gerade vorhandenen Dosis abgebaut. In jeder Stunde werden rund 6,7% der jeweils vorhandenen Dosis abgebaut. Die im Körper vorhandene Medikamentenmenge nimmt also ab wie die Funktionswerte einer Zerfallsfunktion! Es liegt also nahe, eine Zerfallsfunktion zu ermitteln, deren Funktionswerte mit den Tabellenwerten im Rahmen der Messgenauigkeit übereinstimmen.
Die kritische Leserin wird nun einwenden: Wir wissen zwar, dass bei exponentiellem Zerfall in gleichen Zeitabständen die Funktionswerte stets um denselben Prozentsatz abnehmen, doch die **Umkehrung dieses Satzes** wurde nicht nachgewiesen: Warum sollen Zerfallsfunktionen die einzigen Funktionen sein, bei denen die Funktionswerte "so schön" abnehmen? Könnte nicht gelten "Es gibt eine Funktion, die keine Zerfallsfunktion ist, bei der aber trotzdem die Funktionswerte immer um denselben Prozentsatz abnehmen, wenn die x-Werte um denselben Wert zunehmen." ?

Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten:
1. Man glaubt mir, wenn ich versichere: "Solche Funktionen gibt es nicht!"
oder
2. Man glaubt mir meine Versicherung nicht und sieht im Anhang nach.

Als Tatsache halten wir für Funktionen, die nur positive Funktionswerte haben, fest:

> Wenn f eine Funktion ist, bei der für eine beliebig gewählte positive reelle Zahl Δx der Wert von $f(x+\Delta x)$ stets um denselben Prozentsatz größer als $f(x)$ ist (unabhängig davon, welche Werte man für x wählt), so ist f eine Wachstumsfunktion.
> (Es muss also ein $a>0$ und ein $b>1$ geben mit $f(x) = a \cdot b^x$.)

Natürlich gilt bei exponentieller Abnahme eine entsprechende Aussage:

> Wenn f eine Funktion ist, bei der (für beliebig gewähltes $\Delta x \in \mathbb{R}$) für jedes $x \in \mathbb{R}$ stets $f(x+\Delta x)$ um denselben Prozentsatz kleiner als $f(x)$ ist, so ist f eine Zerfallsfunktion.
> (Es gilt also $f(x) = a \cdot b^x$, wobei $a>0$ und $0<b<1$.)

Jetzt lässt sich das oben gestellte Problem lösen:
Wir haben für $\Delta x = 0{,}5$ und $\Delta x = 1$ überprüft, ob exponentielle Abnahme vorliegt. Bei der vorgegebenen Tabelle ließe sich dies auch noch für $\Delta x = 1{,}5$ überprüfen, was wir uns jetzt ersparen. Es gilt also:

$$\mathbf{m(t) = a \cdot b^t}$$

a und b müssen nun mit Hilfe der vorgegebenen Wertetabelle bestimmt werden.

Die Einheiten "schleppen" wir in den folgenden Rechnungen nicht mit, wir behalten aber im Kopf, dass die Zeit jeweils in Stunden und die Masse in Milligramm angegeben wurden.

Es gilt $m(0) = 20$. Aus $m(t) = a \cdot b^t$ folgt dann $20 = a \cdot b^0$. Wir kennen also die Konstante a: $a = 20$. Damit gilt $m(t) = 20 \cdot b^t$. Um die Basis b zu bestimmen, nimmt man sich ein beliebiges Wertepaar der Tabelle: Da nach einer Stunde noch 18,66 mg des Medikaments im Körper sind, gilt $m(1) = 18{,}66$ und somit $18{,}66 = 20 \cdot b^1$. Also: $b = 0{,}933$.
(b kann natürlich auch mit Hilfe des Paars (2/17,41) berechnet werden: Aus $17{,}41 = 20 \cdot b^2$ folgt $b = \sqrt{\frac{17{,}41}{20}}$ ($\approx 0{,}933$, wenn wir auf drei Nachkommastellen runden).

$$\mathbf{m(t) = 20 \cdot 0{,}933^{t}}$$

Aufgabe 9:
Bestätige, dass die Werte in der Tabelle von Aufgabe 8 im Rahmen der Messgenauigkeit mit der soeben ermittelten Funktionsgleichung übereinstimmen.

Das Ausgangsproblem hieß: Wann sind nur noch 1 mg im Körper?
Lösung:
Es ist derjenige Wert t gesucht, für den $1 = 20 \cdot 0{,}933^t$ gilt. Es muss also die Lösung der Gleichung

$$0{,}05 = 0{,}933^{t}$$

gesucht werden.
Aus $\lg(0{,}05) = \lg(0{,}933^t)$ folgt $\lg(0{,}05) = t \cdot \lg(0{,}933)$. (Siehe Seite E 10)
Damit ist $t = \frac{\lg(0{,}05)}{\lg(0{,}933)}$ ($\approx 43{,}2$).
Nach gut 43 Stunden wurden also 95% des Medikaments im Körper abgebaut. (Nach ca. 43 Stunden ist nur noch 1 mg des Medikaments im Körper vorhanden.)

Aufgabe 10:
a) Bestätige, dass die Funktion f, für die die folgende Wertetabelle gilt, exponentielles Wachstum beschreibt.

x	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
f(x)	9,2256	9,63117	10,0546	10,4966	10,958	11,4397

b) Bestimme die Funktionsgleichung (alle Endergebnisse auf drei geltende Ziffern runden).

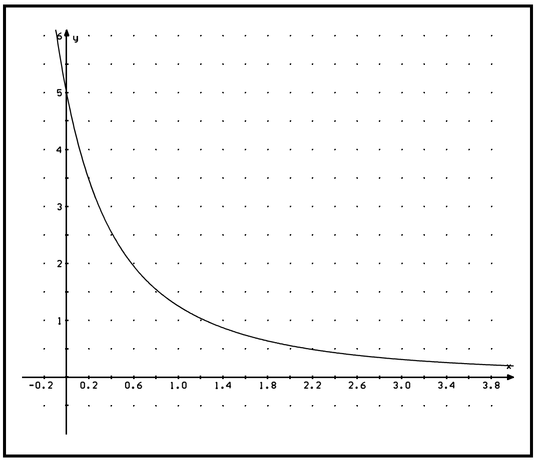
Aufgabe 11:

x	5	5,4	5,8	6,2	6,6	7
f(x)	4,33076	3,92105	3,55009	3,21424	2,91015	2,63484

Bestätige, dass exponentielle Abnahme vorliegt und ermittle die Funktionsgleichung (alle Endergebnisse auf drei geltende Ziffern runden).

Aufgabe 12:
Überprüfe, ob bei der Funktion, deren Graph hier dargestellt ist, exponentielle Abnahme vorliegt.

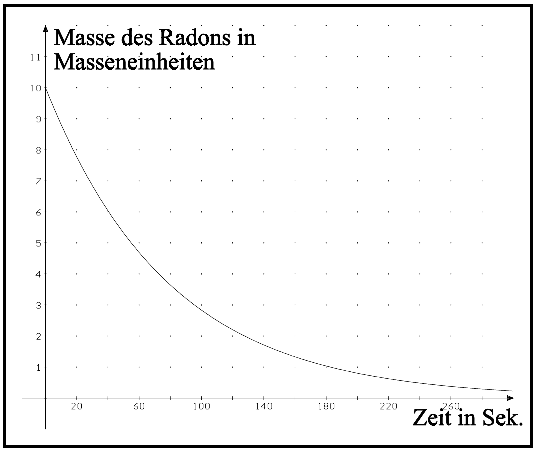
(Natürlich lässt sich diese Überprüfung nur im Rahmen der Ablesegenauigkeit vornehmen.)



Aufgabe 13:

a) Bestätige (lediglich unter Verwendung der Zeichnung), dass die Masse des Radons exponentiell abnimmt. (Wähle Zeitabstände von 20 Sekunden.)

b) Nach welcher Zeit sind noch 5 (2,5 bzw. 1,25) Masseneinheiten des Radons vorhanden? (Bitte einen **gespitzten** Bleistift **und** ein Lineal benutzen!)



Aufgabe 14:
Gegeben ist $f(x) = 10 \cdot 0{,}9876^{x}$.
Berechne die Stellen, für die $f(x_0) = 5$, $f(x_1) = 2{,}5$ bzw. $f(x_2) = 1{,}25$ gilt.

Aus physikalischen Versuchen hat sich ergeben, dass der Zerfall radioaktiver Stoffe stets exponentiell erfolgt: Jeder bisher durchgeführte Versuch hat ergeben, dass in gleichen Zeitabständen stets derselbe Prozentsatz eines bestimmten radioaktiven Stoffes in andere Stoffe zerfällt. Um radioaktive Stoffe hinsichtlich der Schnelligkeit, mit der sie zerfallen, miteinander vergleichen zu können, haben die Physiker den Begriff der **Halbwertszeit** eines radioaktiven Stoffes eingeführt:

> Die Halbwertszeit eines radioaktiven Stoffes (Präparats) ist diejenige Zeit, in der 50% (also die Hälfte) der jeweils vorhandenen Menge des Stoffes in andere Stoffe zerfällt.

Aufgabe 15: Wie groß ist die Halbwertszeit von ^{220}Rn ? (Verwende die Funktionsgleichung aus Aufgabe 14. Gib die Zeit in Sekunden an und runde auf eine Nachkommastelle.) Vergleiche den Wert mit dem in einer Nuklidtabelle angegebenen “Buchwert”.

Radium, das von Maria Skłodowskaja-Curie und ihrem Mann Pierre Curie 1898 entdeckte Element, hat eine Halbwertszeit von rund 1600 Jahren. Ist also eine bestimmte Menge, sagen wir eine Probe von 10^{-7} Gramm, Radium vorhanden, so sind nach ca. 1600 Jahren $0{,}5 \cdot 10^{-7}$g Radium zerfallen. [4]

Wie viele Radiumkerne einer Probe von 10^{-7} Gramm zerfallen in der nächsten Sekunde?
Da das Radium exponentiell zerfällt, die Anzahl N(t) der zu einem Zeitpunkt t der in der vorgegebenen Probe vorhandenen Radiumkerne also exponentiell abnimmt, gilt

$$\mathbf{N(t) = N(0) \cdot b^{t}} \ ,$$

wobei N(0) die Anzahl der Radiumkerne in der Probe zum Versuchsbeginn ist. Um die Basis b zu bestimmen, brauchen wir nicht zu wissen, wie viele Teilchen zu Beginn des Versuchs vorhanden sind:
Messen wir t in Jahren, gilt näherungsweise $0{,}5 = b^{1600}$, woraus $b \approx 0{,}999567$ folgt.

$$N(t) = N(0) \cdot 0{,}999567^{\,t}$$

Wieviele Kerne sind nun in 10^{-7} g Radium vorhanden?
Um diese Frage beantworten zu können, muss man wissen, dass 226g Radium rund $6 \cdot 10^{23}$ Radiumatome enthalten. Dann enthält 1g Radium $\frac{1}{226} \cdot 6 \cdot 10^{23}$ Kerne und unsere Probe enthält $10^{-7} \cdot \frac{1}{226} \cdot 6 \cdot 10^{23}$ Kerne:

$$N(t) = 2{,}65 \cdot 10^{14} \cdot 0{,}999567^{\,t}$$

Wollen wir nun berechnen, wie viele Kerne in der ersten Sekunde zerfallen, müssen wir für t den Wert 1s ($= \frac{1}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}$ a $\approx 0{,}000000032$ Jahre !!!) einsetzen:

Es zerfallen $\Delta N = N(0s) - N(1s) = 2{,}65 \cdot 10^{14} - 2{,}65 \cdot 10^{14} \cdot 0{,}999567^{0{,}000000032}$ Kerne.

Mein Taschenrechner sagt mir, dass überhaupt keine Kerne innerhalb einer Sekunde zerfallen.

???☹???

Jedes (Geiger-Müller) Zählrohr, das in die Nähe der Probe gebracht wird, deutet aber durch "mächtiges Knattern" an, dass etliche (!) Kerne pro Sekunde zerfallen!

Wir sind an die Grenzen [5] des Taschenrechners gestoßen!

(☺ Auf diesen Moment habe ich mich besonders gefreut, weil ich zu viele Kursteilnehmer in meinem Leben kennen gelernt habe, die sich ohne TR wie ein Fallschirmspringer ohne Fallschirm fühlen.)

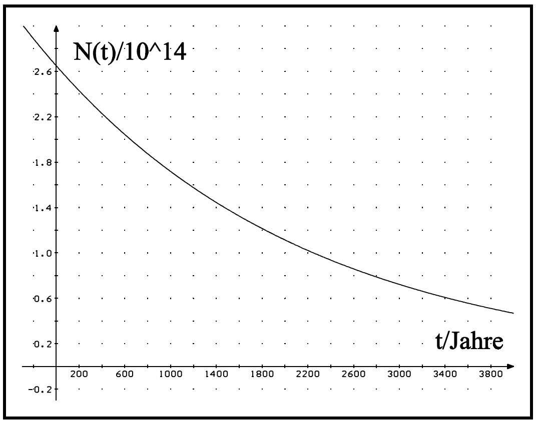
---

[4] Unter den in größeren Mengen rein herstellbaren natürlich vorkommenden radioaktiven Elementen zeigt Radium die stärkste Radioaktivität.

[5] Inzwischen gibt es "normale" TR, die an dieser Stelle noch nicht "aussteigen".

Der Taschenrechner “streikt”, weil die Zeit $\Delta t = 1s$ im Vergleich zur Halbwertszeit von 1600 Jahren sehr sehr klein ist und damit auch die Abnahme ΔN der vorhandenen Kerne im Vergleich zur Gesamtanzahl der vorhandenen Kerne sehr gering ist. Es gäbe aber eine Möglichkeit, sogar im Rahmen der Taschenrechnergenauigkeit ΔN zu berechnen, wenn wir den Wert $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ bestimmen könnten, weil sich dann ΔN aus $\frac{\Delta N}{\Delta t} \cdot \Delta t$ berechnen ließe.

$$\boldsymbol{\frac{\Delta N}{\Delta t} = ???}$$



Links ist die Anzahl der Kerne in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt. Zum Zeitpunkt Null (zu Versuchsbeginn) gilt:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(1s) - N(0s)}{1s - 0s}$$

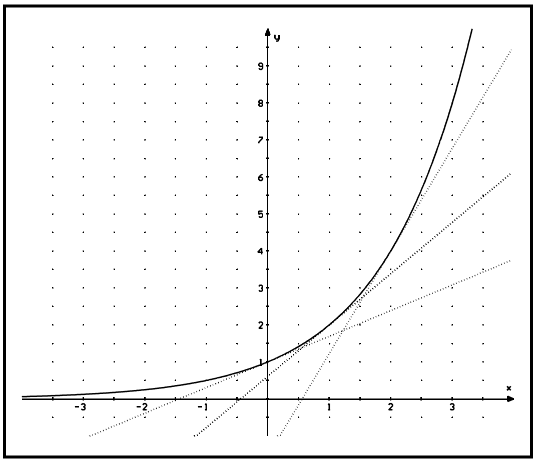
$\frac{\Delta N}{\Delta t}$ gibt in sehr guter Näherung (weil Δt so klein ist) die Steigung des Graphen an!

Damit stellt sich uns folgendes

Problem:

Wie berechnet man die Ableitung von Exponentialfunktionen?

Bevor wir speziell die Ableitung der oben betrachteten Funktion ermitteln, sollen etwas einfachere Exponential- bzw. Wachstums/Zerfallsfunktionen untersucht werden:



Links ist der zu $f(x) = 2^x$ gehörende Graph dargestellt.

An den Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ wurden drei Tangenten an den Graphen gezeichnet, deren Steigung sich sehr gut durch die Sekanten-steigungen an den Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ annähern lassen.

Für h = 0,01 gilt an der Stelle $x_o = 1$

$$\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = \frac{2^{1+0,01} - 2^1}{0,01} = 1,3911\ldots$$

(Die Tangente an den Graphen von f weicht im Punkt (1/2) **praktisch** gar nicht von der Geraden, die durch (1/2) geht und die Steigung 1,3911 hat, ab: In unserer Zeichnung könnte man Sekante und Tangente überhaupt nicht voneinander unterscheiden.)

Aufgabe 16:
Berechne näherungsweise (h = 0,01) die Steigungen von f an den angegebenen Stellen. (Vervollständige die Wertetabelle.)
"Vergleiche" jeweils den Funktionswert von f an den einzelnen Stellen mit dem Näherungswert für die Steigung an dieser Stelle.
Welche Vermutung ergibt sich aus diesen Daten?

x	- 2	-1	0	1	2	3	4	5
f (x)	0,25	0,5	1	2	4			
f´(x) ≈				1,3911				

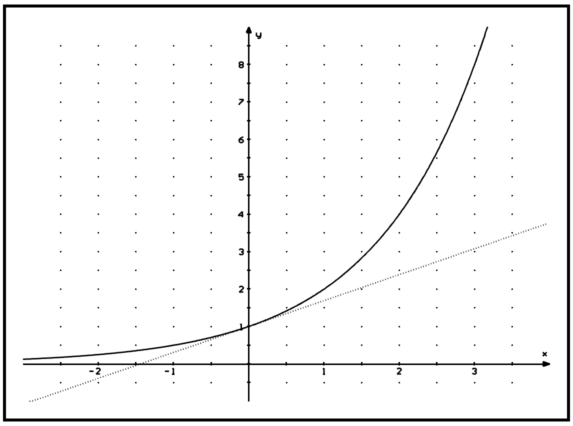
$f\,'(x) =$

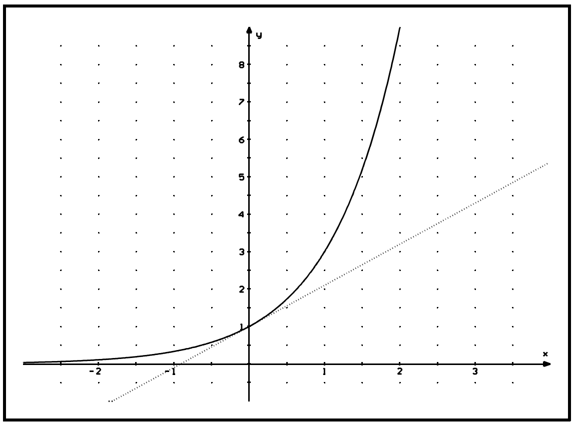
Aufgabe 17:
Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = 3^x$.
Bestimme die Werte einer Wertetabelle für g an denselben Stellen wie in Aufgabe 16.
Welche Vermutung ergibt sich für $g'(x)$?
Beweise diese Vermutung.

Aufgabe 18:
Gegeben ist die durch $f(x) = a^x$ definierte Exponentialfunktion f.
Beweise, dass $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$ gilt.

Um die Ableitung einer Exponenentialfunktion an einer beliebigen Stelle berechnen zu können, muss lediglich die Ableitung an der Stelle Null bekannt sein!

Die schönste aller Exponentialfunktionen





Die beiden Graphen zeigen die zu " 2^x " und " 3^x " gehörenden Graphen einschließlich der Tangenten an der Stelle Null.
Beachtet man den Maßstab der Achsen, sieht man unmittelbar, dass die eine Tangente eine kleinere Steigung als 1 und die andere eine größere Steigung als 1 hat.

Wir hatten bewiesen, dass für alle Exponentialfunktionen f mit $f(x) = a^x$

$$f'(x) = f'(0) \cdot a^x$$

gilt.
Eine besonders einfache Ableitung hat damit diejenige Exponentialfunktion, die an der Stelle Null die Steigung 1 hat.

Gesucht ist also die Basis einer Exponentialfunktion f (wir nennen diese Basis zu Ehren von Herrn **E**uler " e "), für die $f'(0) = 1$ und damit

$$f'(x) = f(x)$$

also

$$(e^x)' = e^x$$

gilt.

Nach den vorangegangenen Betrachtungen gilt offensichtlich

$$\mathbf{2 < e < 3} \quad .$$

Aufgabe 19:
Welche Möglichkeit(en) gibt es, die Basis e genauer zu bestimmen? (Bitte auf fachsprachlich exakten Text achten.)

Grundsätzliche Möglichkeiten, die Zahl e beliebig genau zu bestimmen

Möglichkeit 1:
Die durch $f(x) = e^{x}$ definierte Funktion soll diejenige Exponentialfunktion sein, deren Steigung an der Stelle $x = 0$ den Wert Eins hat. Die durch $g(x) = 3^{x}$ definierte Funktion g hat an der Stelle $x = 0$ eine größere Steigung, die durch $h(x) = 2{,}5^{x}$ definierte Funktion h hat an dieser Stelle eine kleinere Steigung. (Überprüfe diese Aussage durch eine Näherungsrechnung.)
Damit ist e durch die Zahlen 2,5 und 3 eingeschachtelt:

$$2{,}5 < e < 3$$

e lässt sich noch besser durch die Zahlen 2,7 und 2,8 einschachteln, weil " $2{,}7^{x}$ " an der Stelle $x = 0$ eine kleinere Steigung als 1 und die durch " $2{,}8^{x}$ " definierte Funktion an der Stelle $x = 0$ eine größere Steigung als 1 hat.

Aufgabe 20:
Bestätige durch eine Näherungsrechnung, dass $2{,}71 < e < 2{,}72$ gilt.

Fährt man entsprechend fort, wählt man also den Abstand der Basen, zwischen denen e liegen muss, schrittweise beliebig klein, gewinnt man eine Intervallschachtelung für e.

Anmerkung:
Mit dem Taschenrechner lässt sich dieses Verfahren selbstverständlich nicht beliebig fortsetzen, da **jeder** Taschenrechner (Computer) nur mit endlich vielen Stellen rechnen kann. (Die Rechengenauigkeit ist begrenzt!)
Wir können auch nicht **beweisen**, dass man bei diesem Vorgehen eine Intervallschachtelung erhält (die eine reelle Zahl definiert). Aber **grundsätzlich** bin hoffentlich nicht nur ich davon überzeugt, dass das beschriebene Verfahren mathematisch einwandfrei ist.

Möglichkeit 2:
Gesucht ist doch offenbar **die** Exponentialfunktion, deren Tangente an der Stelle $x = 0$ durch $t(x) = x + 1$ definiert ist.
Man wählt sich nun auf dieser Geraden t **(im ersten Schritt)** die Punkte (0 / 1) und (1 / 2). Dann bestimmt man diejenige Exponentialfunktion, die gerade durch diese beiden Punkte geht.

Aufgabe 21:
Zeige, dass die durch " 2^{x} " definierte Exponentialfunktion die einzige **Exponentialfunktion** ist, auf deren Graph die Punkte (0/1) und (1/2) liegen.

Im zweiten Schritt, wählt man sich statt (1 / 2) den Punkt (0,5/1+0,5) auf t.

Aufgabe 22:
Zeige, dass die durch " $\left((1+0{,}5)^{2} \right)^{x}$ " definierte Exponentialfunktion die einzige Exponentialfunktion ist, auf deren Graph die Punkte (0/1) und (0,5/1,5) liegen.

Im zehnten Schritt wählt man den Punkt (0,1 / 1 + 0,1) und **im hundertsten Schritt** den Punkt (0,01 / 1 + 0,01) auf der Geraden t:
Die durch " $((1+0{,}01)^{100})^{x}$ " definierte Exponentialfunktion ist die einzige .....

Ich hoffe, es ist **anschaulich klar**, dass man auf diesem Weg e beliebig genau erhält:
$(1+0{,}0001)^{10000} = 2{,}71814\ldots$

Allgemein lässt sich, entsprechend unserem bisherigen Vorgehen, zeigen, dass unter allen Graphen von Exponentialfunktionen nur der Graph der durch $f_n(x) = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{x}$ definierten Exponentialfunktion die Punkte (0/1) und ($\frac{1}{n}$ / 1 + $\frac{1}{n}$) enthält.

Im Profilkurs Mathematik lässt sich zeigen, dass die durch $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ definierte Folge konvergiert. (Sie ist streng monoton wachsend und nach oben beschränkt.)

Zusammenfassung:
Die durch

$$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$$

definierte Zahl e ist die Basis derjenigen Exponentialfunktion, deren Ableitung an der Stelle Null den Wert 1 hat, für die also gilt:

$$\boxed{(e^{x})' = e^{x}}$$

Anmerkung 1:
In diesem Vorgehen steckt eine Problematik, auf die wir hier im GK-Unterricht nicht eingehen können. Das sollen Mathematikstudenten tun.

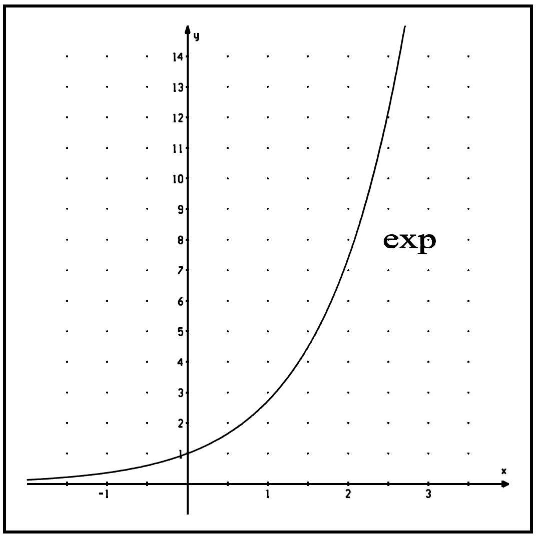
Anmerkung 2:
Prof. Dr. Pachale anno 1963: "Wenn Sie das Gründungsjahr der Universität Dresden (1828) und die Winkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck kennen, können Sie sich e leicht auf 15 Stellen nach dem Komma merken:

$$e = 2{,}7\ 1828\ 1828\ 45\ 90\ 45\ \ldots$$ "

(Wie man sieht, habe ich es bis heute nicht vergessen!)

$$\boxed{\mathbf{e \approx 2{,}72} \text{ und } \boldsymbol{\pi \approx 3{,}14} \text{ (Allgemeinbildung!)}}$$

Da die Exponentialfunktion mit der Basis e sich so leicht ableiten lässt, nimmt sie unter allen Exponentialfunktionen eine Sonderstellung ein:



Ich kenne kein Rechenprogramm eines Computers, in dem nicht die Exponentialfunktion

exp

(exp(x) = e^x)

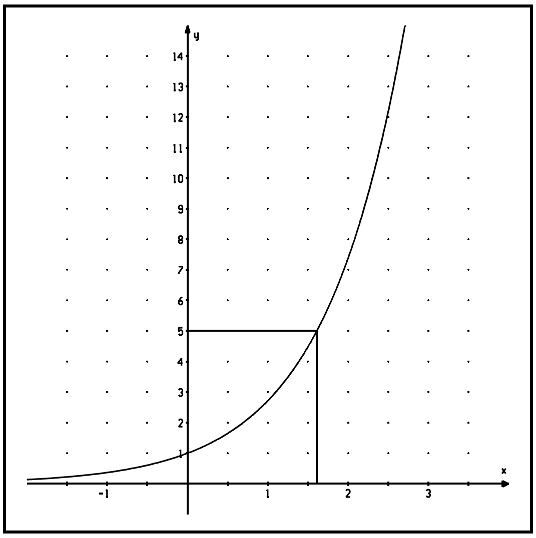
gespeichert ist.

Man bezeichnet die Funktion **exp** auch als die **e-Funktion**.

Bei " e^x " stimmen Funktionswert und Steigung an jeder Stelle überein!

Aufgabe 23:
Berechne näherungsweise mit dem TR (auf vier Nachkommastellen runden) exp(-1) und exp(2). (Bei vielen Taschenrechnern müssen die Tasten **INV** und **ln** bzw. **2ndF** und **ln** betätigt werden, wenn Funktionswerte von **exp** berechnet werden sollen.)
Berechne näherungsweise (h = 0,0001) mit Hilfe des Differenzenquotienten die Steigung von exp an den Stellen - 1 und 2.
Um wie viel Prozent weicht jeweils der Näherungswert für die Steigung vom Funktionswert, den der TR (näherungsweise!) anzeigt, ab?

Physiker, Chemiker, Biologen,… rechnen praktisch nur noch mit Exponentialfunktionen, die die Basis e haben. Tritt in einer Rechnung beispielsweise der Term 5^x auf, so wird dieser zu $e^{a \cdot x}$ umgeformt: **Es ist dasjenige a gesucht, für das 5 = e^a gilt.**



Einen Näherungswert könnte man aus der nebenstehenden Graphik ablesen ($a \approx 1{,}6$).
Also: $5^x \approx e^{1{,}6 \cdot x}$.

Entsprechend könnte man auch ein b finden, so dass $0{,}5 = e^b$ gilt ($b \approx -0{,}7$).
Also: $0{,}5^x \approx e^{-0{,}7 \cdot x}$.

Etwas leichter können wir es uns aber machen, wenn wir daran denken, dass jede Exponentialfunktion eine entsprechende Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion hat.

Die Logarithmusfunktion zur Basis e ist die Umkehrfunktion der e-Funktion, heißt “**l**ogarithmus **n**aturalis” und wird daher mit **ln** bezeichnet.

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

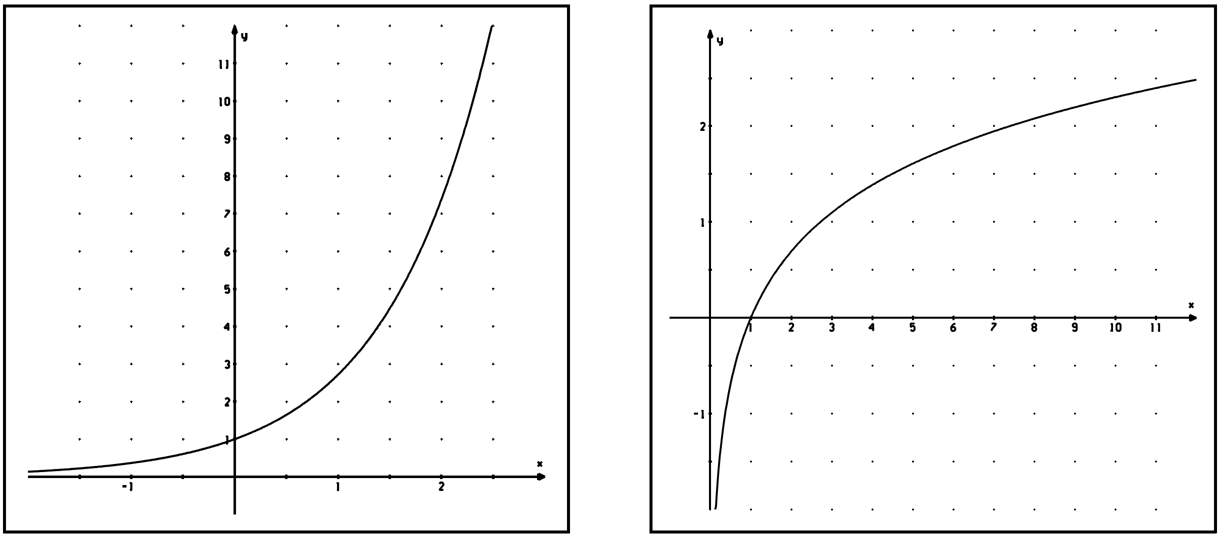
$$\mathbf{ln(e^x) = x}$$

und für jedes positive $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{e^{ln(x)} = x.}$$

Es gilt also $\ln(1) = 0$, da $e^0 = 1$ und $\ln(e) = 1$, da $e^1 = e$.

Es gilt $\ln(\sqrt{e}) = 0{,}5$, da $\sqrt{e} = e^{0,5}$ und $e^{\ln(5)} = 5$.



Oben sind die zu $\mathbf{f(x) = e^x}$ und $\mathbf{g(x) = ln(x)}$ gehörenden Graphen dargestellt.

Jetzt lässt sich endlich das Problem auf Seite 9 lösen, das uns zur e-Funktion (zu **exp**) und zum natürlichen Logarithmus (zu **ln**) geführt hat:

Wie viele Kerne zerfallen in der ersten Sekunde?

Es galt $\quad N(t) = 2{,}65 \cdot 10^{14} \cdot 0{,}999567^{t}$

Da $0{,}999567 = e^{\ln(0,999567)}$, gilt: $\quad N(t) = 2{,}65 \cdot 10^{14} \cdot e^{\ln(0,999567) \cdot t}$

Da $\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx N'(t)$, gilt $\quad \frac{\Delta N}{\Delta t} \approx 2{,}65 \cdot 10^{14} \cdot \ln(0{,}999567) \cdot e^{\ln(0,999567) \cdot t}$

Den letzten Schritt versteht man natürlich nur, wenn man die **Kettenregel** nicht vergessen hat:
$(\sin(3x))' = 3 \cdot \cos(3x)$; $(e^{3x})' = 3 \cdot e^{3x}$; $\quad (e^{ax})' = a \cdot e^{ax}$!!!)

$$\Delta N \approx 2{,}65 \cdot 10^{14} \cdot \ln(0{,}999567) \cdot e^{\ln(0,999567) \cdot t} \cdot \Delta t$$

Da die Zahl der zerfallenden Kerne praktisch zum Zeitpunkt t = 0 betrachtet wird und Δt der Zeitspanne 1s entspricht (also 0,000000032 Jahre), folgt

$$\Delta N \approx 2{,}65 \cdot 10^{14} \cdot \ln(0{,}999567) \cdot e^{\ln(0{,}999567) \cdot 0} \cdot 0{,}000000032 \ ,$$

also $$\Delta N \approx 2{,}65 \cdot 10^{14} \cdot \ln(0{,}999567) \cdot 0{,}000000032$$

Das kann ich mit meinem TR ausrechnen:

$$\mathbf{\Delta N \approx -3700}$$

Es zerfallen in der ersten Versuchssekunde rund 3700 Kerne. (Es kommt also nicht “0" heraus wie auf Seite 6.)
Wundert sich jemand, warum ΔN negativ ist? Die Antwort ist nicht allzu schwer:
Es gilt $\Delta N = N(1s) - N(0s)$. Zum Zeitpunkt Null waren aber mehr Radiumkerne vorhanden als eine Sekunde später (die Anzahl der Kerne nimmt ab)!!!
Man kann auch folgendermaßen argumentieren: $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ gibt die Steigung des zu “N(t)” gehörenden Graphen (siehe Seite 10) an. Da dieser Graph streng monoton fallend ist und damit an jeder Stelle eine negative Steigung hat, muss $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ negativ sein. ☺ geschafft!

Ich denke, das auf Seite 9 gestellte Problem hat einige Erkenntnisse gebracht, die im Folgenden noch einmal zusammengestellt werden sollen. Außerdem ist es **notwendig**, “ein wenig” **zu üben**. (Ich kann mir zwar gut vorstellen, dass die wesentlichen Gedankenschritte nachvollziehbar waren, doch heißt dies noch lange nicht, dass sich das neue Wissen auch “gesetzt” hat.)

Was sollte man gelernt haben?

1. Man kann näherungsweise mit Hilfe des Differenzenquotienten die Steigung einer Exponentialfunktion an einer konkreten Stelle berechnen.
2. $e \approx 2{,}72$
   Die e-Funktion ist die “schönste aller Exponentialfunktionen”, da $\exp' = \exp$ gilt.
3. Die Funktion ln ist die Umkehrfunktion der e-Funktion. Die Funktion exp ist die Umkehrfunktion des natürlichen Logarithmus.
   ln ist, wie alle Logarithmusfunktionen, nur für positive x-Werte definiert.
   $\ln(1) = 0$. $\ln(x)$ ist negativ für alle x mit $0 < x < 1$ und positiv für alle $x > 1$.
4. Für alle positiven $a \in \mathbb{R}$ gilt: $a^x = e^{\ln(a) \cdot x}$. Damit lässt sich für alle Exponentialfunktionen die Ableitung angeben:

   $$(a^x)' = \ln(a) \cdot e^{\ln(a) \cdot x}$$

   bzw. $$(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$$

Aufgabe 24: Gib die Ableitungen an!
a) $f(x) = 2^x$ b) $g(x) = 3^x$ c) $h(x) = 0{,}1 \cdot 2^x$ d) $i(x) = 0{,}5 \cdot 3^x$

Aufgabe 25: Gib die Ableitungen an!
a) $f(x) = 0{,}8^x$ b) $g(x) = 12 \cdot 0{,}2^x$ c) $h(x) = 5 \cdot 0{,}8^{2x}$ d) $i(x) = 10 \cdot 0{,}2^{5x}$

Aufgabe 26:
Bestimme die Steigung der durch $g(x) = 12 \cdot 0{,}4^x$ definierten Funktion an den Stellen $x_1=0$, $x_2=1$ und $x_2=4$. (Gib die exakten Werte an und gib die auf zwei Nachkommastellen gerundeten Werte an.)
Skizziere den Graphen im Intervall [0 / 4] und zeichne auch die Tangenten an den Stellen $x_1=0$, $x_2=1$ und $x_2=4$ ein. (Für die x-Achse sollte man sich einen sinnvollen Maßstab wählen!)

Aufgabe 27:
Gib jeweils die Funktionsterme in der Form $a \cdot e^{kx}$ an und runde dabei k auf zwei geltende Ziffern.
a) $g(x) = 2 \cdot 1{,}55^x$ b) $h(x) = 10 \cdot 0{,}905^x$ c) $i(x) = 2{,}4 \cdot 0{,}95^x$
(Damit die Aufgabe nicht zu schwer ist, wird der Lösungsweg am Beispiel $f(x) = 8 \cdot 1{,}3^x$ vorgeführt:
$f(x) = 8 \cdot 1{,}3^x$
$= 8 \cdot e^{\ln(1,3) \cdot x}$
$\approx 8 \cdot e^{0,26 \cdot x}$)

Aufgabe 28:
Die folgende Aufgabe wurde in einer Nachprüfung in Klasse 10 gestellt. Löse diese Aufgabe, indem zuerst die Funktionsterme in die Form “$a \cdot e^{k \cdot x}$“ gebracht werden.

a) Gegeben sind die Funktionen f durch $f(x) = 8 \cdot 0{,}7^x$ und g durch $g(x) = 0{,}5 \cdot 1{,}5^x$. Fülle die Tabelle aus (Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen runden).

x	- 1	1	2	3	5	8
f(x)						
g(x)						

Zeichne die Graphen. (Eine Längeneinheit soll einem Zentimeter in der Zeichnung entsprechen.)

b) **Berechne** den Schnittpunkt der Graphen von f und g. (**End**ergebnisse auf zwei Nachkommastellen runden.)

Löse die in der Einleitung (Seite E4) vorgestellten Aufgaben:

Aufgabe 1:

Die Halbwertszeit von Cäsium 137 (^{137} Cs) beträgt 30 Jahre, die von Blei 210 (^{210} Pb) nur 22 Jahre. Nach wie vielen Jahren ist von beiden Stoffen die gleiche Menge vorhanden, wenn von ^{137} Cs die Anfangsmenge 15 g und von ^{210} Pb die Anfangsmenge 20 g vorhanden ist? Überprüfe das Ergebnis auch zeichnerisch.

Aufgabe 2:

Bei speziellen Untersuchungen der Schilddrüse wird dem Patienten radioaktives Jod verabreicht, dessen Verbreitung im Körper dann mit Hilfe von Strahlenmessgeräten verfolgt werden kann. Das Jod zerfällt so, dass die jeweils vorhandene Menge nach etwa acht Tagen auf die Hälfte zurückgeht. Nach wie vielen Tagen sind noch 10% (1‰) der Anfangsdosis vorhanden?

Aufgabe 3:

Mit zunehmender Entfernung von der Erdoberfläche nimmt der Luftdruck in der Atmosphäre ab. Dieser Zusammenhang zwischen Luftdruck und Höhe wird näherungsweise beschrieben durch die sogenannte barometrische Höhenformel:

$$p_h = p_0 \cdot 0{,}88^{\,h}$$

Dabei ist p_0 der Luftdruck an der Erdoberfläche und p_h der Luftdruck in h Kilometern über der Erdoberfläche.

Von einem Flugzeugkapitän wird ein äußerer Luftdruck von 342 hPa (Hektopascal) festgestellt, während der Luftdruck an der Erdoberfläche 1013 hPa beträgt. In welcher Höhe befindet sich das Flugzeug?

Aufgabe 29:

Die Gleichung $E_A(t) = 50 \cdot 10^6 \cdot e^{0{,}02 \cdot t}$ gibt die Anzahl der Einwohner des Landes A an. (Dabei soll t in Jahren gemessen werden.) Die Gleichung $E_B(t) = 80 \cdot 10^6 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$ gibt die Anzahl der Einwohner des Landes B an. In welchem Jahr haben beide Länder dieselbe Einwohnerzahl? (Wir gehen davon aus, dass die Zeitmessung im Jahr 2002 beginnt.)

Lösung: Gesucht ist diejenige Zeit t , für die

$$50 \cdot 10^6 \cdot e^{0{,}02 \cdot t} = 80 \cdot 10^6 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$$

gilt.

Daraus folgt: $\dfrac{e^{0{,}02 \cdot t}}{e^{-0{,}01 \cdot t}} = 1{,}6$,

also: $e^{0{,}03 \cdot t} = 1{,}6$

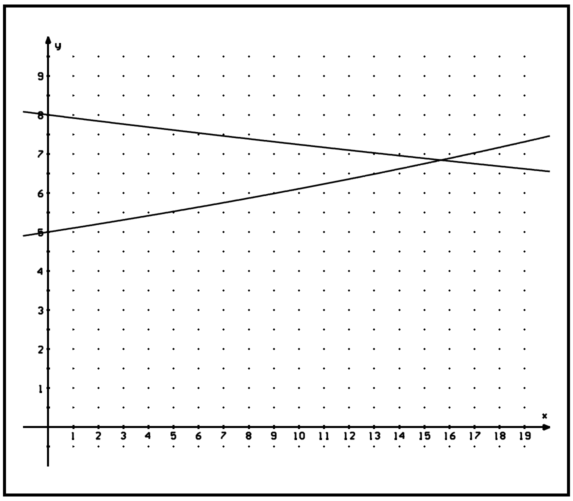
$\ln(e^{0{,}03 \cdot t}) = \ln(1{,}6)$

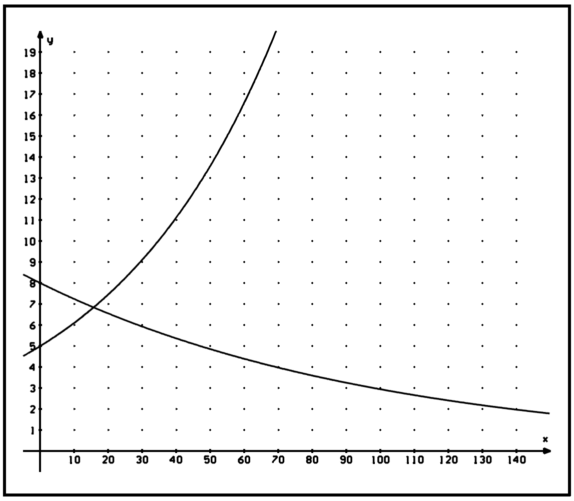
$t \cdot \ln(e^{0{,}03}) = \ln(1{,}6)$

$t = \dfrac{\ln(1{,}6)}{0{,}03}$ ($\approx 15{,}7$ } (Da jetzt November 2002 ist, sind im Jahr …)

Aufgabe 30:

Begründe, dass $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$ $(a > 0)$ für $k > 0$ stets eine Wachstumsfunktion definiert.
Begründe, dass $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$ $(a > 0)$ für $k < 0$ stets eine Zerfallsfunktionen definiert.





Die beiden oberen Graphiken stellen das Bevölkerungswachstum von Land A und die Abnahme der Bevölkerung von Land B in unterschiedlichen Zeiträumen dar (es wird natürlich davon ausgegangen, dass die jährlichen Zunahmen bzw. Abnahmen prozentual unverändert bleiben, was über längere Zeiträume nur selten vorausgesetzt werden kann).
Betrachtet man die Einwohnerzahl in einem kurzen Zeitraum, hat man fast den Eindruck, dass die Zunahme (Abnahme) linear verläuft. In größeren Zeiträumen wird aber deutlich, wie rasant die Bevölkerung tatsächlich zunimmt, wenn sie ungehindert wachsen kann.

Aufgabe 31:

Der radioaktive Zerfall zweier Stoffe wird durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

Stoff 1: $m_1(t) = m_1(0) \cdot e^{-0{,}028 \cdot t}$ (t wird in Minuten gemessen) und

Stoff 2: $m_2(t) = m_2(0) \cdot e^{-0{,}252 \cdot t}$ (hier wird t in Sekunden gemessen).

a) Begründe ohne schriftliche Rechnung, welcher Stoff schneller zerfällt.

b) Bestimme jeweils die Halbwertszeit (siehe Seite 5) der beiden Stoffe. (Runde sinnvoll.)

c) Nach welcher Zeit sind von Stoff 1 99% der Ausgangsmenge zerfallen?

d) Es sind 30g des einen bzw. 10g des anderen Stoffes vorhanden. Unter welcher Voraussetzung kann die folgende Frage beantwortet werden: “Nach welcher Zeit sind von beiden Stoffen gleich viel Gramm vorhanden?” Beantworte die Frage unter dieser Voraussetzung.

Aufgabe 32:

Die Menge eines radioaktiven Stoffs nimmt stets nach der **Zerfallsgleichung**

$$\mathbf{N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$$

ab (λ ist eine positive Zahl und heißt **Zerfallskonstante**).
Bestimme allgemein die Halbwertszeit $\mathbf{t_H}$.

Die mittlere Lebensdauer von radioaktiven Atomkernen:

^{220}Rn hat eine Halbwertszeit t_H von ungefähr 55,6 Sekunden. (Von einem Gramm dieses Radonisotops ist also nach 55,6 Sekunden noch ein halbes Gramm vorhanden, nach rund 111 Sekunden sind noch 250mg vorhanden, … .)
Stellen wir uns einmal vor, wir hätten eine Probe dieses Radonisotops, die genau eine Million Kerne enthält. (Das ist natürlich "rein theoretisch", denn diese unglaublich kleine Menge (!!!) von Radonkernen lässt sich im Experiment kaum als Probe herstellen. Aber rein theoretisch vorstellen können wir uns diese Ausgangssituation.)
Die Anzahl N(t) der zu einem Zeitpunkt t von dieser Probe noch vorhandenen Kerne lässt sich durch

$$N(t) = 1000000 \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{t_H} \cdot t}$$

bestimmen.
In der folgenden Wertetabelle wird angegeben, wieviele Kerne nach den ersten Sekunden jeweils noch vorhanden sind:

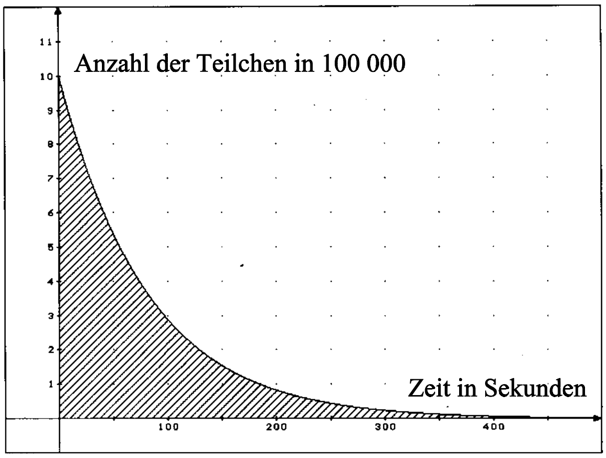
t in Sekunden	N(t)
0	1000000
1	988000
2	975000
3	963000
4	951000
5	940000
6	928000
7	916000
8	905000
9	894000
…..	…..

Rund 12000 Kerne zerfallen in der ersten Sekunde, ca. 975000 Kerne "überstehen" zwei Sekunden, 940000 Kerne haben eine Lebensdauer von mindestens fünf Sekunden, … .

Betrachtet man die vollständige Tabelle, lässt sich ausrechnen, wie lange ein Kern durchschnittlich lebt:
Man addiert die Anzahl der Kerne, die eine Sekunde überstehen, zur Anzahl der Kerne, die die zweite Sekunde überstehen, … , addiert die Anzahl der Kerne, die nach 50 Sekunden noch vorhanden sind, … und dividiert diese Gesamtsumme durch die Anzahl der zu Beginn vorhandenen Kerne:

$$t_M = \frac{988000 + 975000 + 963000 + \dots}{1000000} \text{ s}$$

ist dann die ungefähre mittlere Lebensdauer der Radonkerne.



In der linken Graphik ist die Anzahl der noch vorhandenen Radonkerne in Abhängigkeit von der Zeit (die Zeit wird in Sekunden gemessen) darge-stellt. (Nach 500 Sekunden sind offenbar nicht mehr sehr viele Kerne vorhanden!)
Der Zähler des Bruches

$$\frac{988000 + 975000 + 963000 + \ldots}{1000000},$$

also $988000 + 975000 + \ldots$,

gibt den Inhalt von vielen schmalen (sie haben alle die Breite 1) Rechtecken an, deren Gesamtinhalt in guter Näherung dem Flächeninhalt der Fläche entspricht, die von den Koordinatenachsen und dem durch "N(t)" definierten Graphen begrenzt wird.
Die mittlere Lebensdauer der Kerne lässt sich also offensichtlich mit Hilfe eines Integrals in sehr guter Näherung berechnen: Tatsächlich sind in jedem radioaktiven Präparat erheblich mehr als eine Million Kerne vorhanden und die oben verwendeten Zeitintervalle von einer Sekunde lassen sich beliebig verkleinern, so dass der Flächeninhalt unter der durch "N(t)" definierten Kurve von der "Rechtecksumme" praktisch nicht mehr zu unterscheiden ist. Man muss sich nun nicht daran stören, dass die Fläche unterhalb von "N(t)" nach rechts unendlich ausgedehnt ist, da ihr ein endlicher Inhalt zugeordnet werden kann:

$$N(t) = 1000000 \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{t_H} \cdot t}$$

$$= 1000000 \cdot e^{-0{,}01247 \cdot t} \quad \text{(dabei wird t in Sekunden gemessen)}$$

$$\int_0^{100} N(t)dt = \left[1000000 \cdot \left(-\frac{1}{0{,}01247}\right) \cdot e^{-0{,}01247 \cdot t} \right]_0^{100}$$

$$= 1000000 \cdot \left(-\frac{1}{0{,}01247}\right) \cdot e^{-0{,}01247 \cdot 100} - \left(1000000 \cdot \left(-\frac{1}{0{,}01247}\right) \cdot e^{-0{,}01247 \cdot 0}\right)$$

$$= -23000 + 80200000$$

$$\int_0^{1000} N(t)dt = \left[1000000 \cdot \left(-\frac{1}{0{,}01247}\right) \cdot e^{-0{,}01247 \cdot t} \right]_0^{1000}$$

$$= 1000000 \cdot \left(-\frac{1}{0{,}01247}\right) \cdot e^{-0{,}01247 \cdot 1000} + 80200000$$

$$= -308 + 80200000$$

Es lohnt sich nicht mehr, weiter zu rechnen, da der Wert 308 schon kleiner als die Genauigkeit ist, mit der hier gerechnet werden kann [6].

$\int_0^{1000}$ N(t)dt gibt also bereits im Rahmen der Rechengenauigkeit (Messgenauigkeit) den Inhalt der unendlich ausgedehnten Fläche an, die von den Koordinatenachsen und dem durch "N(t)" definierten Graphen begrenzt wird.

Im Rahmen der Messgenauigkeit gilt also:

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a N(t)dt = 80200000$$

Die mittlere Lebensdauer eines Radonkerns beträgt damit rund 80 Sekunden.

Allgemein lässt sich die mittlere Lebensdauer von Kernen eines radioaktiven Stoffes durch

$$t_M = \frac{\lim\limits_{a \to \infty} \int_0^a N(t)dt}{N(0)}$$

berechnen:

$$\frac{\lim\limits_{a \to \infty} \int_0^a N(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}\, dt}{N(0)} = \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-\lambda \cdot t}\, dt$$

$$= \lim_{a \to \infty} \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \right]_0^a \quad [7]$$

$$= \lim_{a \to \infty} \left(-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot a} + \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

Bei der Berechnung der mittleren Lebensdauer von Atomkernen war es nützlich,

---

[6] t_H ist nur auf drei geltende Ziffern angegeben worden!!

[7] Die Stammfunktion wurde unter Benutzung der Kettenregel ermittelt!

Stammfunktionen von Funktionen, die durch Funktionsgleichungen der Form $f(x)=c \cdot e^{k \cdot x}$ definiert sind, ermitteln zu können.
Aus

$$\boxed{(e^{k \cdot x})' = k \cdot e^{k \cdot x}}$$

folgt unmittelbar

$$\boxed{\int_a^b e^{k \cdot x}\,dx = \left[\frac{1}{k} \cdot e^{k \cdot x}\right]_a^b}$$

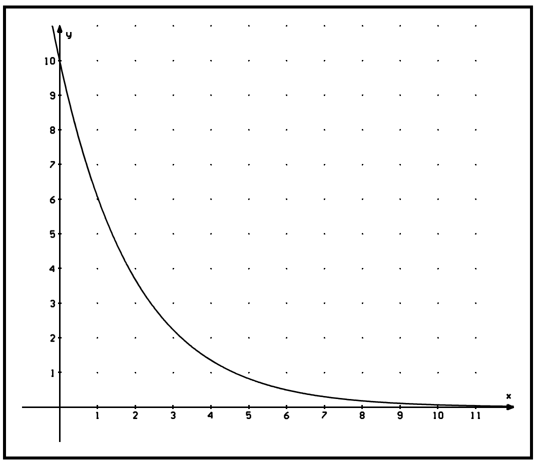
Mit Hilfe des Taschenrechners lässt sich bestätigen, dass sich die Funktionswerte einer durch $f(x) = e^{k \cdot x}$ definierten Funktion (k sei eine positive reelle Zahl) beliebig genau dem Wert Null annähern, wenn die x-Werte beliebig klein ($x \to -\infty$) werden. (Versuche, diese Tatsache textlich zu begründen.) Abkürzend schreiben wir dafür:

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^{k \cdot x} = 0 \quad (k>0)}$$

Entsprechend gilt

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} e^{k \cdot x} = 0 \quad (k<0)}$$

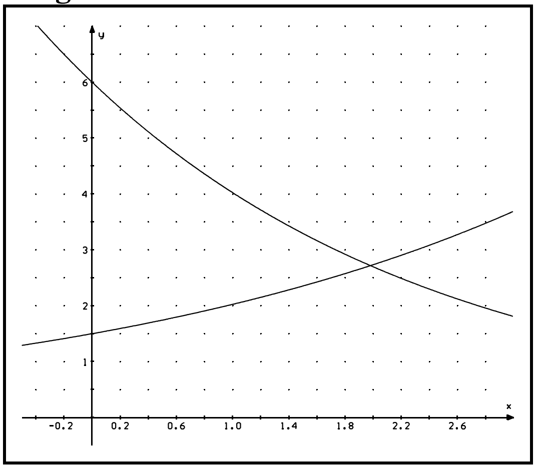
Welche dieser beiden Formeln wurde auf Seite 20 benutzt?



Aufgabe 33:

Bestimme den Inhalt der Fläche, die im ersten Quadranten von der x-Achse, der y-Achse und dem Graphen der durch $f(x) = 10 \cdot e^{-0,5 \cdot x}$ definierten Funktion begrenzt wird. Überprüfe, ob das Ergebnis mit dem links dargestellten Graphen verträglich ist.

Aufgabe 34:



Bestimme die Steigungen der durch

$$f(x) = 6 \cdot e^{-0,4x} \text{ bzw. } g(x) = 1,5 \cdot e^{0,3x}$$

definierten Funktionen im Schnittpunkt ihrer Graphen.

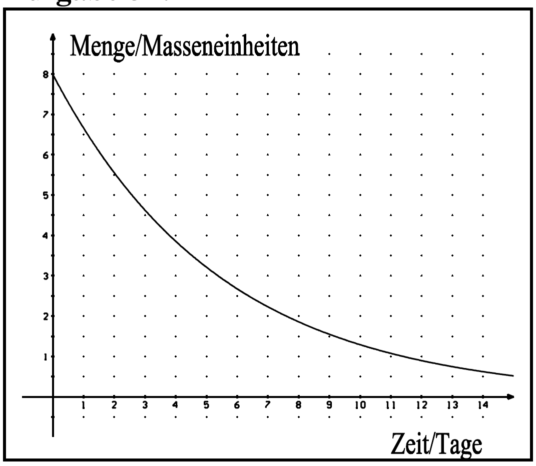
Wie groß ist der Inhalt der Fläche, die die beiden Graphen und die y-Achse miteinander einschließen?

Aufgabe 35:
Francium 223 hat eine Halbwertszeit von rund 22 Minuten.

a) Bestimme die Zerfallskonstante.
b) Wie groß ist die mittlere Lebensdauer eines Kerns?
c) Es sei eine Probe von einem Gramm dieses Stoffes gegeben. Bestimme in Abständen von fünf Minuten, wie viel Gramm von der Ausgangssubstanz noch vorhanden ist.
Wie viel Prozent der Ausgangsmenge sind nach fünf Stunden bereits zerfallen?
Stelle graphisch in Abhängigkeit von der Zeit dar, welche Menge der Ausgangssubstanz jeweils zerfallen ist.
Nach welcher Zeit sind 99% der Ausgangsmenge zerfallen?

Aufgabe 36:
Zu Versuchsbeginn sei die Menge m(0) eines radioaktiven Stoffes vorhanden.
Wie groß ist die noch vorhandene Menge dieses Stoffes nach der Zeit t_M (=mittlere Lebensdauer der Kerne) ?

Aufgabe 37:



In einem Experiment wird die vorhandene Menge eines radioaktiven Präparats in Abhängigkeit von der Zeit ermittelt. Es ergibt sich die links dargestellte Graphik.

a) Wie könnte man, nur unter Kenntnis des vorgegebenen Graphen ermitteln, um welches Isotop es sich bei dem Präparat handelt? (Bitte auf einen ordentlichen Text achten!)
b) Um welches Isotop handelt es sich?

e-Funktionen in Anwendungen

$$f(x) = \frac{a \cdot e^{b \cdot x}}{1 + c \cdot (e^{b \cdot x} - 1)}$$

Gleichungen dieser Form beschreiben sogenanntes "logistisches Wachstum". Darunter versteht man im Gegensatz zu ungestörtem exponentiellem Wachstum eine exponentielle Zunahme, die durch äußere Einflüsse begrenzt ist: Eine Population kann i.Allg. nicht ungestört/unbegrenzt wachsen, da beispielsweise ihre Nahrungsreserven begrenzt sind.

$$g(x) = c \cdot (e^{a \cdot x} + e^{-a \cdot x})$$

Gleichungen dieser Art treten im Zusammenhang mit dem Verlauf von durchhängenden Seilen, Überlandleitungen, Ketten, … auf. Man nennt daher den zu g gehörenden Graphen auch Kettenlinie.

$$f(x) = \frac{x^3}{e^{k \cdot x} - 1}$$

Diese Gleichung spielt in der Physik eine wesentliche Rolle im Zusammenhang mit der Energieabstrahlung von Körpern in Abhängigkeit von ihrer Temperatur.

Ich denke, diese Beispiele machen hinreichend einsichtig, warum man Funktionsgleichungen dieser Art mit Hilfe der Differentialrechnung (also mit Hilfe von f´, f´´, …) untersucht.

Eine Kurvendiskussion

Gegeben ist die durch $\mathbf{f(x) = x^2 \cdot e^x}$ definierte Funktion f.

1. Der Definitionsbereich:
Da der Term e^x für jedes $x \in \mathbb{R}$ definiert ist, ist der gesamte Funktionsterm für jedes $x \in \mathbb{R}$ definiert und D_{max} (= maximaler Definitionsbereich von f) ist gleich der Menge der reellen Zahlen ($\mathbb{R}$): $D_{max} = \mathbb{R}$.

2. Symmetrie:
Da $f(1) = e$ und $f(-1) = \frac{1}{e}$, kann der Graph von f nicht achsensymmetrisch zur y-Achse sein.
Da auch $-f(-1) \neq f(1)$ gilt, ist der Graph auch nicht punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

3. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
$f(0) = 0$. Die y-Achse wird also im Koordinatenursprung geschnitten.
Da der Term $\mathbf{e^x}$ **stets positive** Werte annimmt, kann es außer $x_N = 0$ keine weiteren Nullstellen geben.

4. Extrempunkte und Wendepunkte:

$f(x) = x^2 \cdot e^x$

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$ (Produktregel)

$= (2x + x^2) \cdot e^x$ (Ausklammern ist oft praktisch für die weiteren Rechnungen)

$f''(x) = (2 + 2x) \cdot e^x + (2x + x^2) \cdot e^x$

$= (2 + 2x + 2x + x^2) \cdot e^x$

$= (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x$

$f'''(x) = (2x + 4) \cdot e^x + (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x$

$= (2x + 4 + x^2 + 4x + 2) \cdot e^x$

$= (x^2 + 6x + 6) \cdot e^x$

Die Funktionswerte von f können nur an denjenigen Stellen ein relatives Extremum haben, an denen der Graph von f eine waagerechte Tangente hat. (**$f'(x_E) = 0$** ist eine **notwendige** Bedingung dafür, dass an der Stelle x_E ein relatives Extremum vorhanden ist.)
Die Stellen mit waagerechten Tangenten ergeben sich damit als Lösungen der Gleichung

$$(2x + x^2) \cdot e^x = 0$$

Da ein Produkt den Wert Null annimmt, wenn einer der Faktoren den Wert Null annimmt und $e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt (da dies bereits bei der Berechnung der Nullstellen festgestellt wurde, kann der entsprechende Hinweis in den weiteren Rechnungen entfallen), ergeben sich die Stellen mit waagerechten Tangenten als Lösungen von

$$2x + x^2 = 0 \qquad \text{bzw.}$$
$$x \cdot (2 + x) = 0$$

Der Graph von f hat also an den Stellen $x_{E_1} = 0$ und $x_{E_2} = -2$ waagerechte Tangenten.

Da $f'(0) = 0$ **und** $f''(0) = 2$, **muss** f an der Stelle $x_{E_1} = 0$ ein relatives Minimum haben. ($f'(x_{E_1}) = 0$ **und** $f''(x_{E_1}) > 0$ ist eine **hinreichende** Bedingung dafür, dass die Funktionswerte von f an der Stelle x_{E_1} ein relatives Minimum haben.)

$f''(-2) = ((-2)^2 + 4\cdot(-2) + 2) \cdot e^{-2}$

$= (4 - 8 + 2) \cdot e^{-2}$

$= -2 \cdot e^{-2} \quad (<0)$

$f'(-2) = 0$ **und** $f''(-2) < 0$ ist eine **hinreichende** Bedingung dafür, dass an der Stelle $x_{E_2} = -2$ ein relatives Maximum liegt.

$f(-2) = 4 \cdot e^{-2} \qquad (\approx 0{,}54)$

$(0 / 0)$ ist ein Tiefpunkt des Graphen von f, $(-2 / 4 \cdot e^{-2})$ ist ein Hochpunkt.

Eine **notwendige Bedingung** dafür, dass f an der Stelle x_W einen **Wendepunkt** hat, ist

$$\mathbf{f''(x_W) = 0}.$$

Der Graph von f kann also höchstens an denjenigen Stellen Wendepunkte haben, für die

$$x^2 + 4x + 2 = 0 \qquad \text{gilt.}$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind:

$$x_{W_{1,2}} = -2 \pm \sqrt{4 - 2}$$

$$x_{W_1} = -2 + \sqrt{2} \; (\approx -0{,}586); \; x_{W_2} = -2 - \sqrt{2} \; (\approx -3{,}414)$$

Um absolut sicher zu sein, dass an diesen Stellen tatsächlich Wendepunkte liegen, könnte (nicht: “müsste” !!) man $f'''(x_{W_1})$ und $f'''(x_{W_2})$ berechnen. Ich verzichte hier (später meistens auch) auf diese Berechnung, da sie mir zu zeitraubend ist. [8]

Zur Berechnung der y-Koordinaten der beiden Wendepunkte sollte man etwas “taschenrechnerfest” sein:

$$f(-2 + \sqrt{2}) = (-2 + \sqrt{2})^2 \cdot e^{-2 + \sqrt{2}}$$

$$\approx 0{,}19$$

$$f(-2 - \sqrt{2}) = (-2 - \sqrt{2})^2 \cdot e^{-2 - \sqrt{2}}$$

$$\approx 0{,}38$$

Anmerkung:

Diese Funktionswerteberechnung ist i.Allg. ziemlich “fehlerträchtig”. In den meisten Fällen wird man auf derartige Berechnungen verzichten, wenn man aus der Funktionsgleichung lediglich den prinzipiellen Verlauf des Graphen ermitteln möchte. Sofern aber doch die vollständigen Koordinaten spezieller Kurvenpunkte gesucht sind, kann man sich oft auch auf Rechnungen mit Näherungswerten beschränken:

$$f(-2 + \sqrt{2}) \approx f(-0{,}586)$$
$$= (-0{,}586)^2 \cdot e^{-0{,}586}$$
$$\approx 0{,}19$$

Zum Abschluss kommen wir zu einem der wesentlichsten Punkte der Kurvendiskussion:

Das Verhalten der Funktionswerte für sehr große x (Verhalten für $x \to \infty$) und für sehr kleine x (Verhalten für $x \to -\infty$):

---

[8] Aus Überlegungen, die im Anschluss an die folgenden Betrachtungen auf Seite 30 durchgeführt werden, folgt, dass an den Stellen $x_{W_{1,2}}$ wirklich Wendepunkte liegen.

Da die Werte, die x^2 und e^x für $x \to \infty$ annehmen, unbeschränkt wachsen, müssen auch die Funktionswerte von f für $x \to \infty$ unbeschränkt wachsen.

Anmerkung:

In vielen (Schul)-Büchern wird dieser Sachverhalt abkürzend durch $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ dargestellt.

Ich kann dies gar nicht leiden, weil ich gelernt habe, dass der **Limes einer Folge** eine **reelle Zahl** mit bestimmten Eigenschaften ist. ∞ ist aber keine reelle Zahl.

Also …!! Ich bin aber bereit, einen Kompromiss einzugehen: Ich akzeptiere die abkürzende Schreibweise **“** $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty}$ “, da mir durch die Anführungsstrichelchen signalisiert wird, dass man weiß, ….

Etwas problematischer wird nun die Untersuchung für $x \to -\infty$: x^2 wächst wieder unbeschränkt, aber die Werte, die e^x für $x \to -\infty$ annimmt, nähern sich beliebig genau dem Wert Null (konvergieren gegen den Wert Null) .

?? Que´est - ce que c´est “ ∞ · **0** “ ??

Es steht uns an dieser Stelle kein Hilfsmittel zur Verfügung, um dieses Problem mathematisch einwandfrei zu lösen. In diesem Fall (und in zukünftigen, ähnlich gelagerten Fällen) müssen wir uns auf den Taschenrechner beschränken, der aber keine absolute Gewissheit verschafft:

$f(-10) = 100 \cdot e^{-10}$ $(\approx 0{,}0045)$

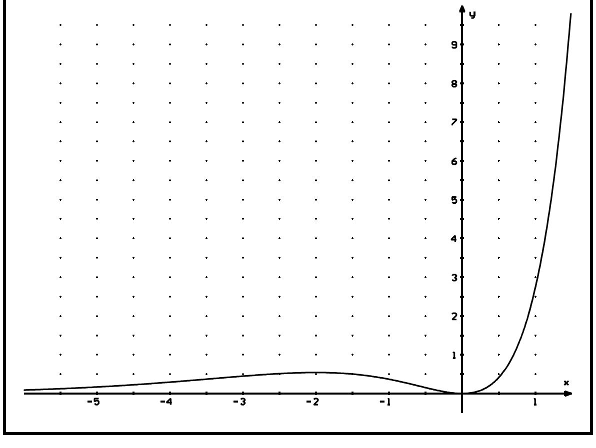
$f(-50) = 2500 \cdot e^{-50}$ $(\approx 4{,}8 \cdot 10^{-19})$

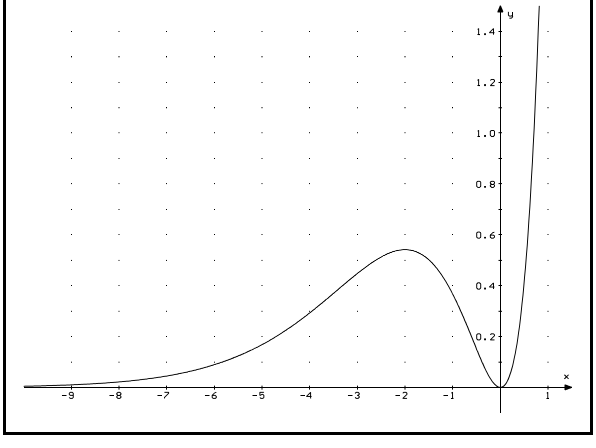
Wir berechnen also Näherungswerte von f(x) für zwei oder drei ausgewählte x-Werte und schließen daraus auf das Verhalten des Graphen.

In unserem Beispiel nähert sich der Graph von f für $x \to -\infty$ offenbar beliebig genau der x-Achse. Man sagt dann: **Der Graph von f nähert sich asymptotisch der x-Achse.**

☺ **Man wähle sich stets einen geeigneten Maßstab für die Achsen!** ☺

Anmerkungen zur gerade durchgeführten Kurvendiskussion:





1. Da es offensichtlich keine negativen Funktionswerte geben kann, muss an der Stelle Null ein **absolutes** Minimum vorhanden sein.

2. Da es keine negativen Funktionswerte gibt, nähert sich der Graph von f für $x \to -\infty$ asymptotisch von oben der x-Achse.

3. Da f an der Stelle $x_{E_1} = 0$ ein Minimum und an der Stelle $x_{E_2} = -2$ ein relatives Maximum hat, muss zwischen diesen beiden Stellen eine Wendestelle liegen! (Diese Aussage gilt, weil die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Bei Funktionen, die wie " $\frac{1}{x}$ " Definitionslücken haben, ist ein solcher Schluss nicht möglich.)

4. Da f an der Stelle $x_{E_2} = -2$ ein relatives Maximum hat und sich der Graph von f für $x \to -\infty$ asymptotisch von oben der x-Achse nähert, muss es für einen x-Wert, der kleiner als - 2 ist, (mindestens/wenigstens) eine Wendestelle geben.

Sind die Stellen waagerechter Tangenten, die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und "das Verhalten im Unendlichen" ($x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$) bekannt, lässt sich der Graph einer Funktion in den meisten Fällen ohne größere Schwierigkeiten (typisch Mathematiker: Immer wieder finden sie alles leicht, was **sie** verstanden haben!) im wesentlichen Verlauf skizzieren. Liegt eine Symmetrie des Graphen (bezüglich der y-Achse oder des Ursprungs) vor, wird man diese ausnutzen, um bei der Diskussion ökonomischer vorgehen zu können.

Aufgabe 38: Untersuche "das Verhalten im Unendlichen" bei den folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$ b) $f(x) = x^{11} \cdot e^{-x}$ c) $f(x) = x^{100} \cdot e^{-x}$

d) $f(x) = x^3\, e^{-0{,}001 \cdot x}$ e) $f(x) = (1 - x^3)\, e^{0{,}05 \cdot x}$ f) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$

Aufgabe 39:

a) Begründe ohne Mittel der Differentialrechnung, dass der durch $f(x) = e^{-x^2}$ definierte Graph wenigstens zwei Wendepunkte haben muss.

b) Begründe ohne Mittel der Differentialrechnung, dass der durch $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$ definierte Graph wenigstens vier Wendepunkte haben muss.

Aufgabe 40: Bei welchen Funktionen weisen die Graphen eine Symmetrie auf?

a) $f(x) = x^2 \cdot e^{2 \cdot x}$ b) $f(x) = x^2 \cdot e^{x^2}$ c) $f(x) = x^3 \cdot e^{x^2}$

d) $f(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-x^2}$ e) $f(x) = 5 \cdot e^{(x-3)^2}$ f) $f(x) = e^{2 \cdot x} + e^{-2 \cdot x}$

Aufgabe 41: Untersuche die Graphen auf Stellen mit waagerechten Tangenten.

a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$ b) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$ c) $f(x) = (1 - ax) \cdot e^{x}$

d) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^{-3x}$ e) $f(x) = (x^2 + a) \cdot e^{2 - x}$ f) $f(x) = (x - 1) \cdot e^{k \cdot x}$

Für die Funktionen in den Aufgaben 42 - 47 gilt: $D_{max} = \mathbb{R}$.

Aufgabe 42:
Der Graph einer Funktion f ist symmetrisch zur y-Achse und hat im Punkt (0/1) ein absolutes Maximum. Alle Funktionswerte sind positiv. Es gibt genau zwei Wendepunkte (einer liegt im Punkt (0,7 / 0,6)). Skizziere den grundsätzlichen Verlauf, wenn $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ gilt.

Aufgabe 43:
Der Graph einer Funktion f ist punktsymmetrisch zum Ursprung und hat dort auch einen Wendepunkt. Im Punkt (0,7 / 0,4) liegt ein relatives Maximum. Im Punkt (1,2 / 0,3) liegt ein Wendepunkt. Es gibt keine weiteren Wendepunkte oder Extrempunkte für $x > 0$. Wie verläuft der Graph, wenn $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ gilt?

Aufgabe 44:
Eine Funktion f hat im Ursprung einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente. An den Stellen $3 \pm \sqrt{3}$ liegen weitere Wendepunkte, zwischen denen ein relatives Maximum liegt. Weitere Wendepunkte und relative Extrema gibt es nicht. Wie sieht der Graph aus, wenn $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ gilt?

Aufgabe 45:
Der Graph einer Funktion f hat im Punkt (- 1 / - 0,37) einen Tiefpunkt. Im Ursprung liegt die einzige Nullstelle. Es gibt nur den Wendepunkt (- 2 /- 0,3). Skizziere den Graphen, wenn $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ vorausgesetzt werden darf ?

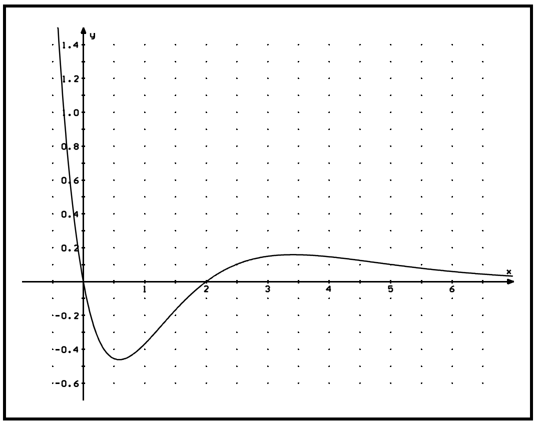
Aufgabe 46:
Der Graph einer Funktion f verläuft durch den Ursprung, hat im vierten Quadranten einen absoluten Tiefpunkt und nähert sich für $x > 0$ asymptotisch von oben der x-Achse. Wie verläuft der Graph, wenn er genau zwei Wendepunkte hat?

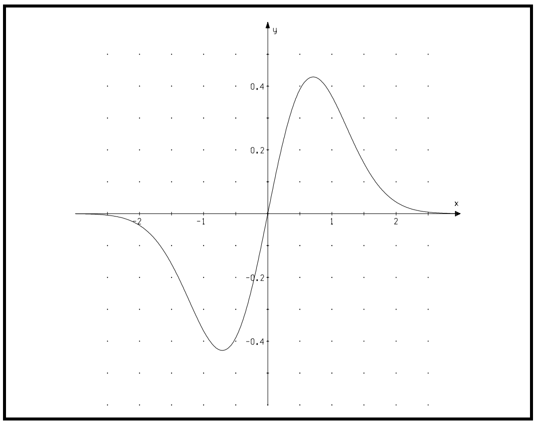
Aufgabe 47:
Der Graph von f nähert sich im dritten Quadranten asymptotisch der x-Achse. Der Graph hat außerdem genau eine Wendestelle x_W , genau einen relativen Extremwert an der Stelle x_E und genau eine Nullstelle x_N. Es gilt $x_W < 0 < x_E < x_N$. Skizziere den prinzipiellen Verlauf des Graphen.

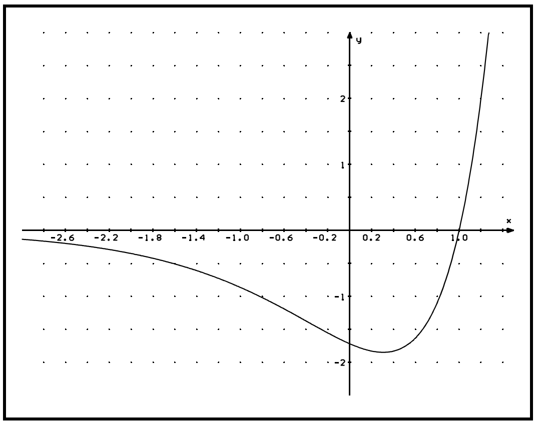
Aufgabe 48:
Die unten dargestellten sechs Graphen gehören zu den folgenden Funktionsgleichungen:
$f(x) = 2\sin(x) \cdot e^{-0,1x}$; $g(x) = e^{x}\,(e^{x} - e)$; $h(x) = \cos(x) \cdot e^{-0,5x}$;

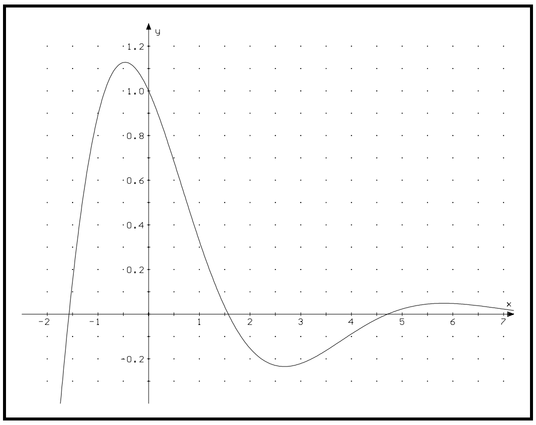
$i(x) = x \cdot e^{-x^2}$; $j(x) = x^3 \cdot e^{-x}$; $k(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^{-x}$.

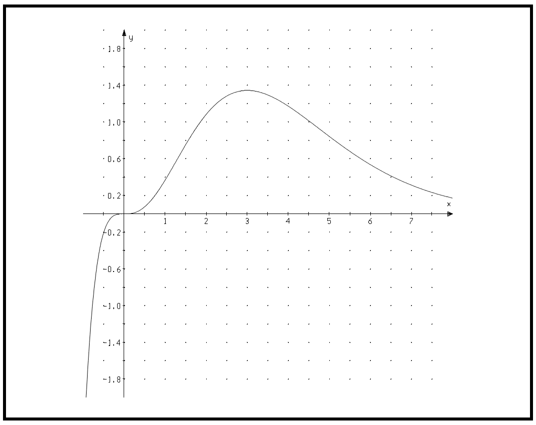
Ordne die Funktionsgleichungen begründet den einzelnen Graphen zu. (Mir genügt an dieser Stelle nicht, dass man einfach ein paar Funktionswerte ausrechnet und dann vergleicht. Es darf ruhig auch etwas abgeleitet werden.)

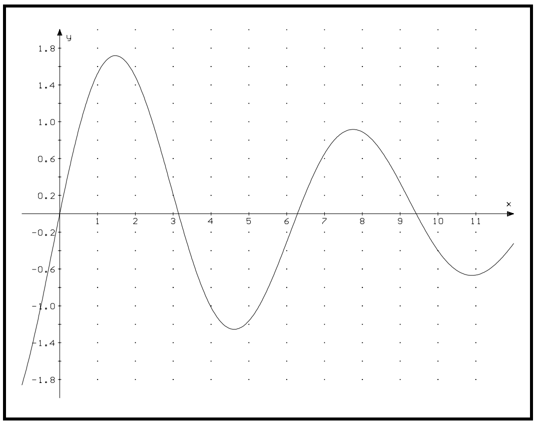












Man bestätigt durch Differenzieren (Kettenregel!), dass die durch $F(x)= \frac{1}{3}e^{3x}$ definierte Funktion F eine Stammfunktion von f ($f(x) = e^{3x}$) ist.
Auf Seite 21 wurde die Kettenregel “rückwärts angewandt”, um eine Stammfunktion zu ermitteln. Auch in einigen anderen (etwas komplizierteren) Fällen findet man mit Hilfe der Kettenregel (rückwärts angewandt) Stammfunktionen:

Aufgabe 49:
Gib zu den durch die folgenden Funktionsgleichungen definierten Funktionen die Funktionsgleichung einer Stammfunktion an:
a) $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$ b) $g(x) = x \cdot e^{x^2}$ c) $h(x) = x \cdot e^{-x^2}$
d) $k(x) = (e^x - 3)^2$ (Tipp: Ausmultiplizieren)

In anderen vergleichsweise einfachen Fällen scheitern wir aber, wenn wir eine Stammfunktion finden wollen. Dann hilft uns höchstens (siehe folgende Anmerkung) ein Rechenprogramm (z.B. “derive”) und wir können lediglich durch Ableiten überprüfen, ob sich das Computerprogramm (bzw. die Lehrkraft beim Abschreiben vom Bildschirm) nicht geirrt hat.

Anmerkung: Den Wert von $\int_0^1 \sqrt{\sin(x)}\,dx$ kann aber auch “derive” nur näherungsweise bestimmen: Zum Integranden $\sqrt{\sin(x)}$ gibt es nämlich keine Stammfunktion, mit der wir “in gewohnter Weise” rechnen könnten.

Aufgabe 50: Zeige, dass F jeweils eine Stammfunktion von f ist.

a)	$f(x) = x \cdot e^x$;	$F(x) = (x - 1) \cdot e^x$
b)	$f(x) = x^2 \cdot e^x$;	$F(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$
c)	$f_k(x) = (x + k) \cdot e^{-x}$;	$F_k(x) = -(x + k + 1) \cdot e^{-x}$
d)	$f(x) = \sin(x) \cdot e^{-x}$;	$F(x) = -0{,}5\, e^{-x} \cdot (\sin(x) + \cos(x))$
e)	$f_a(x) = (x - 2) \cdot e^{a \cdot x}$;	$F_a(x) = \left(\frac{x}{a} - \frac{2}{a} - \frac{1}{a^2}\right) \cdot e^{a \cdot x}$

Aufgabe 51:
Gegeben ist f durch $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^{-x}$.
a) Bestimme den Inhalt der Fläche, die der Graph von f im vierten Quadranten mit der x-Achse einschließt.
b) Bestimme den Inhalt der unendlich ausgedehnten Fläche, die der Graph von f für $x \geq 2$ mit der x-Achse einschließt.

Aufgabe 52:
Gegeben ist f durch $f(x) = x \cdot e^x$. Bestimme den Inhalt der Fläche, die der Graph mit der x-Achse im dritten Quadranten einschließt.

Aufgabe 53:
Gegeben ist f durch $f(x) = e^x (e^x - e)$. Bestimme den Inhalt der Fläche, die von den beiden Koordinatenachsen und dem Graphen von f eingeschlossen wird.

Darf es auch etwas umfangreicher/schwieriger sein?

Aufgabe 54:

Gegeben ist die Funktionenschar (f_t) durch $f_t(x) = e^x (e^x - t)$ $(t \in \mathbb{R})$

a) Zeige, dass

$$f_t'(x) = 2e^{2x} - te^x \quad (= e^x (2e^x - t))$$
$$f_t''(x) = 4e^{2x} - te^x \quad (= e^x (4e^x - t))$$
$$f_t'''(x) = 8e^{2x} - te^x \quad (= e^x (8e^x - t))$$

gilt.

b) Welcher Graph schneidet die x-Achse im Punkt (1 / 0) ?

c) Für welche t haben die Funktionen, die zu der Funktionenschar gehören, **absolute** Extremwerte? Bestimme die Koordinaten der Extrempunkte. Welcher Extrempunkt liegt auf der y-Achse?

d) Zeige, dass die Extrempunkte auf dem durch $g(x) = - e^{2x}$ definierten Graphen liegen. (Wer´s nicht kann, sollte sich die nächste Seite ansehen.)

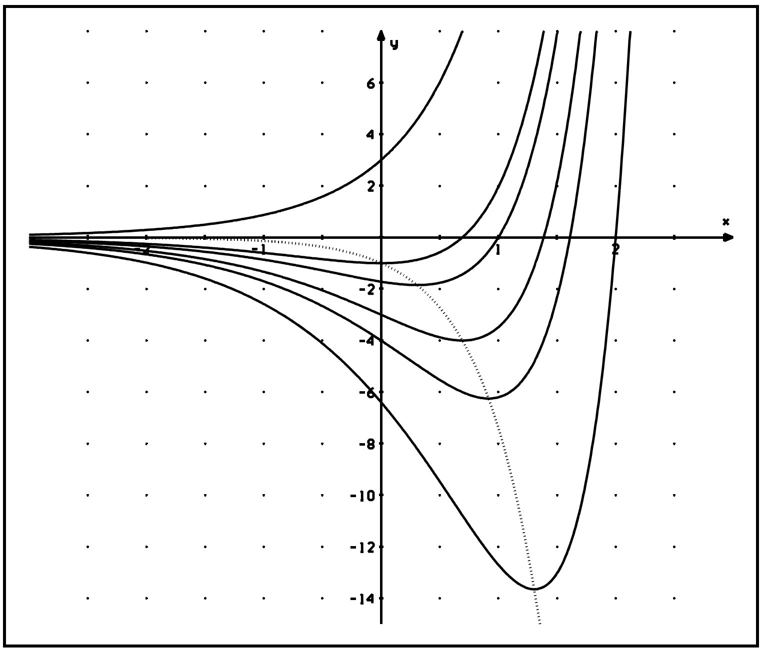
e) Für welche t haben die Graphen Wendepunkte? Welcher Graph hat seinen Wendepunkt auf der y-Achse?

f) Gib die Funktionsgleichung einer Stammfunktion F_t von f_t an.

Gib die Funktionsgleichung von F_e an und berechne $\int_{-2}^{1} f_e(x)\, dx$.

Was lässt sich **allein** aus dem Wert von $\int_{-2}^{1} f_e(x)\, dx$ über den Verlauf des Graphen von f_e im Intervall [- 2 / 1] aussagen? (Hier wird nicht viel, aber exakter Text erwartet.)

g)



Ordne den Graphen die entsprechenden Parameter zu. (Es darf vorausgesetzt werden, dass die Schnittpunkte mit den Achsen ganzzahlige Koordinaten haben, wenn dies den Anschein hat.)

Lösung zu Aufgabe d)
Für positive Parameter t haben die Graphen jeweils an der Stelle $x_{E_t} = \ln(0{,}5t)$ ein Minimum.

Es gilt $f_t(\ln(0{,}5t)) = 0{,}5t \cdot (0{,}5t - t)$
$= -0{,}25 \cdot t^2$

Die Extrempunkte haben also die Koordinaten I $x_{E_t} = \ln(0{,}5t)$

und II $y_{E_t} = -0{,}25 \cdot t^2$

Eliminiert man nun aus den Gleichungen I und II den Parameter t, erhält man eine Gleichung, die angibt, wie y_{E_t} von x_{E_t} abhängt:

Aus I folgt $0{,}5t = e^{x_{E_t}}$ bzw. $t = 2e^{x_{E_t}}$. (Es wurde also nach t aufgelöst.)

Nun wird in II eingesetzt: $y_{Et} = -0{,}25 \cdot (2e^{x_{E_t}})^2$.

$$y_{Et} = -e^{2 \cdot x_{E_t}}$$

Die Koordinaten der Extrempunkte müssen also die Gleichung $g(x) = -e^{2 \cdot x}$ erfüllen.

(Der zugehörige Graph wurde in der vorigen Graphik gepunktet eingezeichnet.)

Zu Aufgabe f)

Mein Rechenprogramm sagt mir, dass $\int_{-2}^{1} f_e(x)\,dx \approx -3{,}34$ gilt. (Gibt es etwa jemanden, der das nicht herausbekommen hat?)
Aus diesem Ergebnis kann lediglich geschlossen werden, dass der Graph von $\mathbf{f_e}$ im Intervall [- 2 / 1] **wenigstens teilweise** unterhalb der x-Achse verlaufen muss. (Es kann unter den in der Aufgabenstellung gemachten Voraussetzungen nicht gefolgert werden, dass der Graph in diesem Intervall insgesamt unterhalb der x-Achse verläuft!)

Zu Aufgabe g)
Der ganz oben liegende Graph muss zu einem negativen Parameter gehören, da der Graph keine waagerechten Tangenten hat. t ergibt sich aus dem Schnittpunkt (0/3), den der Graph mit der y-Achse hat.
Der ganz unten liegende Graph hat die Nullstelle $x_N = 2$. t muss sich also als Lösung der Gleichung

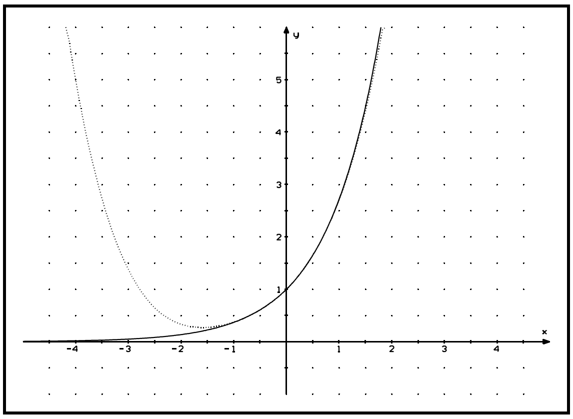
$$e^2 (e^2 - t) = 0$$

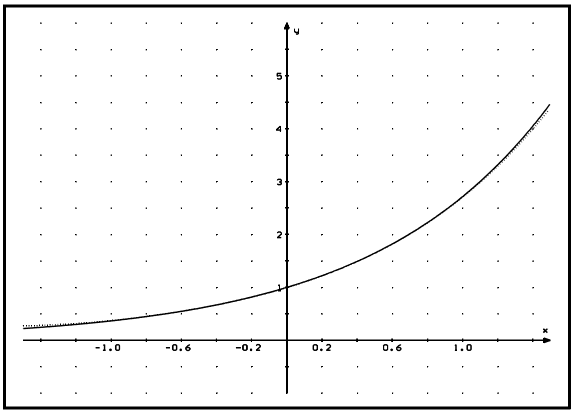
ergeben.

Im Grundkurs ma-2(1998/99) wurde im Unterricht folgende Frage gestellt:

Wir ermitteln gerade mit Hilfe der Funktionsgleichung den Graphen einer Funktion. Lässt sich denn umgekehrt aus dem Graphen auch die Funktionsgleichung ermitteln?

Antwort:





Die beiden Graphiken zeigen in verschiedenen Intervallen Ausschnitte des Graphen der Exponentialfunktion exp ($\exp(x) = e^x$) und des Graphen der Polynomfunktion (ganzrationalen Funktion) f, die durch $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4$ definiert ist.

Aufgabe 55: Berechne näherungsweise mit dem TR exp(0,2) und f(0,2) sowie die Funktionswerte von exp und f an der Stelle - 0,3.

Fazit: Aus einem Graphen lassen sich offenbar "nur in Näherung Schlüsse" ziehen. Es lässt sich zeigen (ist aber zu zeitaufwendig für den normalen Schulunterricht), dass sich jede "halbwegs vernünftige" Funktion beliebig genau durch ganzrationale Funktionen annähern lässt. Die Graphen stimmen dann in bestimmten Intervallen (die Größe des Intervalls bestimmt die "Kompliziertheit" der Polynomfunktion) hervorragend überein. Eine Unterscheidung der Graphen ist dann praktisch (= durch Betrachtung der Graphen im entsprechenden Intervall) nicht mehr möglich.

Aufgabe 56: Untersuche f´´ auf Nullstellen. Was lässt sich aus dem Ergebnis dieser Untersuchung hinsichtlich des Verlaufs des Graphen von f schließen?

Wenn eine Wertetabelle (die sich beispielsweise aus einem Experiment ergeben hat) vorgegeben ist und überprüft werden soll, ob exponentielles Wachstum vorliegt, so ist diese Überprüfung grundsätzlich nur im Rahmen der Messgenauigkeit (und im betrachteten Intervall) sinnvoll!!!!

4.5.99 Klausur im Grundkurs ma-2 Name: (Zeit: 180 Minuten)

Bitte auf eine ordentliche Darstellung achten.

Aufgabe 1:

a) Bestätigen Sie, dass die vorgegebene Wertetabelle zu einer Exponentialfunktion gehört und erläutern Sie Ihr Vorgehen. Geben Sie die Funktionsgleichung an. (Bitte die Basis auf zwei Nachkommastellen runden.)

x	0,5	2	3	3,5	4	5,5
f(x)	0,938	0,774	0,681	0,639	0,600	0,495

/6+2

b) Radon 220 hat die Eigenschaft, dass in jeder Sekunde ca. 1,24% einer vorgegebenen Menge dieses radioaktiven Stoffs zerfällt. Bestimmen Sie die Halbwertszeit dieses Elements. (Rechnen Sie mit voller TR-Genauigkeit und runden Sie das Endergebnis auf zehntel Sekunden.) /6

Aufgabe 2:

Gegeben sind f und g durch $f(x) = 5 \cdot e^{-0,3x}$ und $g(x) = 0,5 \cdot e^{0,7x}$.

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Graphen (Endergebnisse auf zwei Nachkommastellen runden). /4

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Schnittpunkt mit der y-Achse. /2

c) Skizzieren Sie die beiden Graphen im Intervall [- 0,5 / 4] . (Maßstab für die Koordinatenachsen: 2cm = 1 Einheit.) /4
Zeichnen Sie auch die unter b) berechnete Tangente ein.

d) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von der y-Achse und den beiden Graphen eingeschlossen wird. /6

e) Zeigen Sie, dass der unendlich ausgedehnten Fläche, die vom Graphen von f, sowie der x-Achse und der y-Achse begrenzt wird, ein endlicher Inhalt zugeordnet werden kann. (Geben Sie diesen Inhalt auch an.) /6

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktionenschar (f_k) durch $f_k(x) = (k - e^{-x})^2$ $(k \in \mathbb{R};\ k>0)$.

a) Zeigen Sie ohne Mittel der Differentialrechnung, dass alle Funktionen der Schar ein absolutes Minimum haben. /3

b) Bestimmen Sie die Nullstelle von f_2 und den Schnittpunkt des Graphen von f_2 mit der y-Achse. Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten dieses Graphen. /4

c) Berechnen Sie auf zwei unterschiedlichen Wegen $f_k'(x)$. /6

d) Für weitere Rechnungen dürfen Sie ohne Nachweis $\mathbf{f_k''(x) = 4e^{-2 \cdot x} - 2ke^{-x}}$ voraussetzen. Überprüfungen mit f_k''' brauchen nicht durchgeführt zu werden.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Graphen, auf dem die Wendepunkte der einzelnen Graphen der Schar liegen. /4

e) Berechnen Sie $f_2(-1,5)$, $f_2(3)$ und geben Sie den Wendepunkt des Graphen von f_2 an. Skizzieren Sie nun den Graphen von f_2 und den seiner Asymptote unter Benutzung der bisherigen Ergebnisse, **ohne weitere Rechnungen durchzuführen**, im Intervall [- 1,5 / 3]. /3+4
Skizzieren Sie zusätzlich in dasselbe KOSY den unter d) ermittelten Graphen, auf dem die Wendepunkte liegen und den Graphen von f_1. /2+4
Maßstab für die x-Achse: 1LE = 2 cm.

Aufgabe 1:

a) Wenn die vorgegebene Wertetabelle zu einer Exponentialfunktion gehört, muss die prozentuale Abnahme der Funktionswerte konstant sein, wenn sich die x-Werte jeweils um denselben Wert vergrößern. Dies wird für die Funktionswerte f(2), f(3) sowie f(4) überprüft (hier wachsen die x-Werte jeweils um 1):

$\frac{f(3)}{f(2)} \approx 0{,}88$; $\frac{f(4)}{f(3)} \approx 0{,}88$ Die Funktionswerte nehmen jeweils um ca. 12% ab.

Überprüfung der Funktionswerte f(0,5), f(2) sowie f(4) und f(5,5)
(hier wachsen die x-Werte jeweils um 1,5):

$\frac{f(2)}{f(0{,}5)} \approx 0{,}825$; $\frac{f(5{,}5)}{f(4)} = 0{,}825$. Die Funktionswerte nehmen jeweils um ca. 17,5% ab.

(Es ließen sich weitere Beispiele zur Bestätigung finden, doch genügen hier zwei beliebig ausgewählte Beispiele.)

b) Da die Masse pro Sekunde um 1,24% abnimmt, gilt

$$m(t) = m(0) \cdot (1 - 0{,}0124)^{t},$$

also: $$m(t) = m(0) \cdot 0{,}9876^{t},$$ wobei die Zeit in Sekunden gemessen wird.

Es ist diejenige Zeit t_H zu bestimmen, für die $0{,}5 \cdot m(0) = m(0) \cdot 0{,}9876^{t_H}$ gilt.

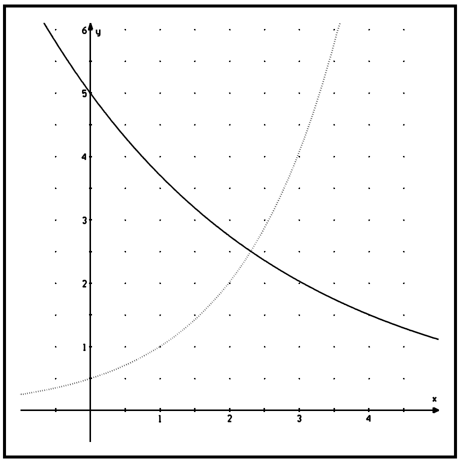
Diese Gleichung lässt sich nach t_H auflösen: $0{,}5 = 0{,}9876^{t_H}$.

also : $\ln(0{,}5) = \ln(0{,}9876^{t_H})$ bzw. $\ln(0{,}5) = t_H \cdot \ln(0{,}9876)$.

Daraus folgt: $t_H = \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}9876)}$ ($\approx 55{,}6$).

55,6s ist also die Halbwertszeit von Radon 220.
(Beide Aufgaben finden Sie (1b sogar identisch) in Ihrem Ordner.)

Aufgabe 2:



Die Schnittstelle ist Lösung der Gleichung
$5 \cdot e^{-0{,}3x} = 0{,}5 \cdot e^{0{,}7x}$.
Durch äquivalente Umformung ergibt sich:
$10 = e^{0{,}7x - (-0{,}3x)}$
$10 = e^{x}$

$x_S = \ln(10)$ ($\approx 2{,}30$) ist also die Schnittstelle der beiden Graphen.

Wegen $f(\ln(10)) = 5 \cdot e^{-0{,}3 \cdot \ln(10)} \approx 2{,}51$

schneiden sich die beiden Graphen ungefähr im Punkt (2,30/2,51).

$\int_0^{\ln(10)} (f(x) - g(x))dx \approx 5{,}45$ (Eine Stammfunktion von f wird durch $F(x) = -\frac{50}{3}e^{-0{,}3x}$ definiert.
Der Rest der Aufgabe erfordert sorgfältigen Umgang mit dem TR.)

$$\int_0^z f(x)dx = \int_0^z 5\cdot e^{-0,3x}\,dx$$
$$= \left[-\frac{50}{3}e^{-0,3x}\right]_0^z$$
$$= -\frac{50}{3}e^{-0,3z} - \left(-\frac{50}{3}\right)$$
$$= -\frac{50}{3}e^{-0,3z} + \frac{50}{3}$$

Da $\lim\limits_{z\to\infty} e^{-0,3z} = 0$ gilt, folgt: $\lim\limits_{z\to\infty}\int_0^z f(x)dx = \frac{50}{3}$.

Der unendlich ausgedehnten Fläche lässt sich also der endliche Inhalt $\frac{50}{3}$ ($\approx 16{,}7$) zuordnen.

Aufgabe 3:

a)Der Funktionsterm kann offensichtlich keine negativen Werte annehmen.

Aus $(k - e^{-x})^2 = 0$ folgt $e^{-x} = k$ und somit $-x = \ln(k)$ bzw. $x = -\ln(k)$.

An der Stelle $-\ln(k)$ ist der Funktionswert von f_k Null. Dies ist der kleinste Funktionswert, den die Funktionen der Schar annehmen können und gleichzeitig haben die Funktionen an der Stelle $-\ln(k)$ eine Nullstelle.

b)Die Nullstelle von f_2 muss nicht gesondert berechnet werden, sie ergibt sich unmittelbar aus den vorigen Überlegungen: $x_{N_2} = -\ln(2)$ ($\approx -0{,}69$).

Da $f_2(0) = (2 - e^{-0})^2$
$= (2 - 1)^2$
$= 1$, schneidet der Graph von f_2 die y-Achse im Punkt (0/1).

Durch Berechnung der Funktionswerte an den Stellen 10 und 50 erkennt man unmittelbar, dass die Funktionswerte von f_2 für $x \to \infty$ gegen 4 konvergieren. Der Graph nähert sich asymptotisch von unten der durch $a(x) = 4$ definierten Parallelen zur x-Achse.

Für $x \to -\infty$ wachsen die Funktionswerte unbeschränkt.

c)$f_k(x) = (k - e^{-x})^2$
$= (k - e^{-x})\cdot(k - e^{-x})$
$= k^2 - 2ke^{-x} + e^{-2x}$

$f_k'(x)$ lässt sich nun auf drei verschiedenen Wegen berechnen:

1. $f_k'(x) = 2(k - e^{-x})\cdot(-e^{-x})\cdot(-1)$ (Kettenregel)
$= 2e^{-x}(k - e^{-x})$

2. $f_k'(x) = ((k - e^{-x})\cdot(k - e^{-x}))'$ (Produktregel)
$= (k - e^{-x})'\cdot(k - e^{-x}) + (k - e^{-x})\cdot(k - e^{-x})'$
$= e^{-x}(k - e^{-x}) + (k - e^{-x})e^{-x}$
$= e^{-x}(k - e^{-x} + k - e^{-x})$
$= e^{-x}(2k - 2e^{-x})$
$= 2e^{-x}(k - e^{-x})$

3. (Ableitung der einzelnen Summanden, nachdem die binomische Formel angewandt wurde)

$$f_k'(x) = 2ke^{-x} - 2e^{-2x} = 2e^{-x}(k - e^{-x})$$

d) x_W kann (muss nicht!) nur dann eine Wendestelle des Graphen sein, wenn $f_k''(x_W) = 0$ gilt.
Da $f_k''(x) = 4e^{-2x} - 2ke^{-x}$, sind die möglichen Wendestellen die Lösungen der Gleichung

$$4e^{-2x} - 2ke^{-x} = 0$$
$$2e^{-x}(2e^{-x} - k) = 0$$

Da e^{-x} nie den Wert Null annehmen kann, ergibt sich die einzige Lösung aus:

$$2e^{-x} - k = 0$$
$$e^{-x} = \frac{k}{2}$$
$$-x = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$$

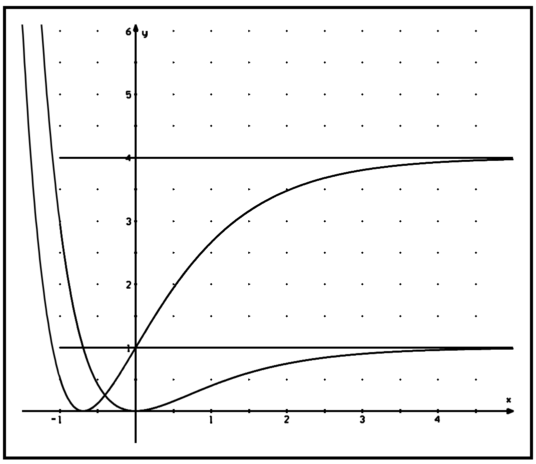
$x_W = -\ln\left(\frac{k}{2}\right)$ ist also die einzige mögliche Wendestelle.

(Da alle Graphen im tiefsten Punkt die x-Achse berühren und die durch $a_k(x) = k^2$ definierte Parallele zur x-Achse Asymptote ist, **müssen** die Graphen aber auch offensichtlich an dieser Stelle einen Wendepunkt haben.)

$$f(x_W) = f\left(-\ln\left(\frac{k}{2}\right)\right) = \left(k - e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}\right)^2 = \left(k - \frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4}$$

Die Graphen haben also in $\left(-\ln\left(\frac{k}{2}\right) \,/\, \frac{k^2}{4}\right)$ einen Wendepunkt.

Aus **I** $x_W = -\ln\left(\frac{k}{2}\right)$ und **II** $y_W = \frac{k^2}{4}$ ergibt sich die Funktionsgleichung für die Kurve, auf der die Wendepunkte der Schar liegen.



Aus **I** folgt $k = 2e^{-x_W}$.

In **II** eingesetzt: $y_W = \frac{(2e^{-x_W})^2}{4}$;

also: $y_W = e^{-2x_W}$

Zeichnen Sie den zu $w(x) = e^{-2x}$ gehörenden Graphen links selbst ein.

Aufgabe 3 (39 % des Gesamtumfangs)

Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch $\mathbf{f_a(x) = (x - a) \cdot e^{a \cdot x}}$ für $a > 1$.

a) In welchen Punkten werden die Koordinatenachsen geschnitten?

b) Zeigen Sie, daß $f_a''(x) = a \cdot e^{a \cdot x} \cdot (ax - a^2 + 2)$ gilt.

c) Ermitteln Sie die Stellen x_{E_a} waagerechter Tangenten und geben Sie $f_a(x_{E_a})$ an.

Zur Kontrolle : $f_a(x_{E_a}) = -\frac{1}{a} \cdot e^{a^2 - 1}$

(Im weiteren dürfen Sie ohne Nachweis davon ausgehen, daß sich an den Stellen x_{E_a} relative Extrempunkte befinden.)

Wie verändert sich die Lage dieser Extrempunkte relativ zu den Koordinatenachsen für wachsendes a?

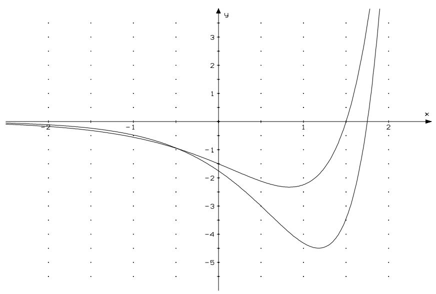
d) Untersuchen Sie das Verhalten von f_1 für $x \to \pm\infty$. (Im weiteren dürfen Sie davon ausgehen, daß sich im Unendlichen alle Graphen der Schar wie f_1 verhalten.)

Begründen Sie, wieviele Wendepunkte jeder Graph der Schar haben muß, ohne dazu f''' zu berechnen.

e) Skizzieren Sie nun in einem Koordinatensystem den grundsätzlichen Verlauf der zu f_k und f_m gehörenden Graphen, wenn $1 < k < m$ gilt.

Erwartungshorizont zu Aufgabe 3 gemäß AV Abitur Anlage 3a /3.3.2

Aufgabe	Erwartete Teilleistung	AB	BE	Didakt. Kommentar
3a	(a/0) und (0/-a) sind die Achsenschnittpunkte	I	2	
3b	$f_a'(x) = e^{a \cdot x} \cdot (ax - a^2 + 1)$ $f_a''(x) = \ldots$	II II	3 4	In ma-2 wurden " $(x/a)e^{a \cdot x}$ " und " $(x^2\text{-}a)\ e^{-x}$ " ausführlicher behandelt.
3c	$x_{Ea} = \frac{a^2-1}{a}$ $f_a(\frac{a^2-1}{a}) = (\frac{a^2-1}{a}-a) \cdot e^{a \cdot \frac{a^2-1}{a}}$ $= \frac{a^2-1-a^2}{a} \cdot e^{a^2-1}$ $= -\frac{1}{a} \cdot e^{a^2-1}$ Für $a>1$ liegen die Extrempunkte im vierten Quadranten. Die Extrempunkte wandern mit zunehmendem a "nach rechts unten".	I II III III	2 3 3 4	Wesentlich ist die korrekte Darstellung des **inhaltlichen** Sachverhaltes. Da im Unterricht derartige Sprechweisen ("nach rechts unten") toleriert wurden (eine fachsprachlich absolut korrekte Formulierung zu verlangen, erscheint an dieser Stelle pädagogisch nicht sinnvoll), soll hier auch eine laxere Sprechweise akzeptiert werden. Analoge allgemein gehaltene Fragestellungen wurden im Unterricht nicht behandelt. Für einen GK ist es nicht trivial, die Lage der Extrempunkte korrekt anzugeben. Es muß **selbständig** (z.B. über die Berechnung von Werten für verschiedene Parameter) ermittelt werden, wie sich die Lage der Extrempunkte ändert.

3d	Der Graph nähert sich für negative x-Werte von unten asymptotisch der x-Achse. (Bestätigung durch Berechnung an zwei geeigneten Stellen genügt.) Der Graph wächst für positive x-Werte unbeschränkt. Da die Graphen höchstens einen Wendepunkt (siehe f_a”) haben können, muß wegen des Verhaltens der Graphen im Unendlichen genau ein Wendepunkt existieren.	II I III	4 1 3	Entsprechende Antwortsätze wurden im Unterricht verlangt. Völlig neuartige Fragestellung. Eine knappe, das Wesentliche erfassende textliche Begründung ,wird hier akzeptiert.
3e	 Wesentlich ist die korrekte Darstellung des asymptotischen Verhaltens der **einzelnen** Graphen, der Achsenschnittpunkte und der relativen Lage der Extrempunkte zueinander. (Die Schnittpunkte der Graphen miteinander müssen nicht dargestellt werden.)	II II	6 3	Sechs BE sollen vergeben werden, falls ein Graph inhaltlich richtig dargestellt wird. Die anderen drei BE beziehen sich auf die korrekte Darstellung der beiden Graphen relativ zueinander. Die hohe Anzahl der BE wird dadurch gerechtfertigt, daß praktisch kein “Zahlenmaterial” vorliegt, aus dem die Graphen erschlossen werden können. (Zeit!)

(Hinweis: 1996 war die “alte” Rechtschreibung verbindlich!)

Zeitdruck

Wahr ist: Viele Lehrer glauben, wirkliche Leistung komme nur unter extremem Zeitdruck zustande. Deshalb packen sie ihre Klausuren so voll, daß selbst Superhirne ins Hecheln kommen. Unwahr ist, daß dieselben Lehrer sich bei der Korrektur der Klausuren unter irgendeinen Zeitdruck setzen lassen.

Aus: “Herzlichen Glückwunsch zum bestandenen Abitur” ; TOMUS-Verlag

Nachdem ausgiebig Wachstumsfunktionen untersucht wurden, wenden wir uns nun der Umkehrfunktion von **exp** zu, dem natürlichen Logarithmus **ln**. Da die Funktionswerte der e-Funktion “explosionsartig” wachsen, muss die Wachstumstumsgeschwindigkeit der Funktionswerte von **ln** mit zunehmenden x-Werten immer geringer werden. Dies lässt sich bestätigen, wenn wir näherungsweise ln´(100), ln´(1000), … mit Hilfe des Differenzen-quotienten bestimmen:

$$\frac{\ln(100+0{,}1) - \ln(100)}{0{,}1} = 0{,}0099950\ldots$$

Aufgabe 57:
Berechne näherungsweise wie im obigen Beispiel ln´(1000) und ln´(10000).

Offenbar gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \ln'(x) = 0$. Und eine zweite Vermutung ergibt sich aus den drei Näherungswerten: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. (Übrigens: Wenn diese zweite Vermutung stimmt, ist die erste Vermutung - nämlich $\lim\limits_{x\to\infty} \ln'(x) = 0$ - eine triviale Konsequenz!)

Der Beweis von $\mathbf{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$ ist besonders einfach, wenn man die Formel auf dem Deckblatt des Skripts nicht vergessen und die Kettenregel noch nicht zu den Akten gelegt hat:

$$e^{\ln(x)} = x$$

Leitet man beide Seiten der Gleichung ab, erhält man

$$e^{\ln(x)} \cdot \ln'(x) = 1 \quad \text{bzw.} \quad x \cdot \ln'(x) = 1$$

Also gilt:

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

Kommt man nicht (trickreich) darauf, sich die Gleichung $e^{\ln(x)} = x$ nutzbar zu machen, muss man einen etwas langwierigeren Weg in Kauf nehmen, der aber den Vorteil hat, eine Beweisidee mitzuliefern, wie man generell die Ableitung von Umkehrfunktionen ermitteln kann, wenn die Ableitung der Ausgangsfunktion bekannt ist. Mehr dazu im Anhang auf den Seiten A3 und A4.

Wer hätte es selbst gekonnt?

Beispiel 1:

$$f(x) = x \cdot \ln(x)\ .$$

$$f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \ln(x) + 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

(Daraus folgt, dass der Graph von f keine Wendepunkte haben kann. Begründung?)

Beispiel 2:

$$f(x) = (\ \ln(x)\ )^2\ .$$

$f'(x)$ lässt sich auf zwei verschiedene Weisen berechnen:

- Unter Benutzung der Kettenregel:
  $$f'(x) = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x}\quad .$$
- Unter Benutzung der Produktregel:
  $$f'(x) = (\ \ln(x) \cdot \ln(x)\ )'$$
  $$= \frac{1}{x} \cdot \ln(x) + \ln(x) \cdot \frac{1}{x}$$
  $$= 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$$
  $$= 2 \cdot \frac{\ln(x)}{x}$$

Aufgabe 58:

Berechne die zweite Ableitung von f aus Beispiel 2. (Hinweis: $2 \cdot \frac{\ln(x)}{x} = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$)

Aufgabe 59:

Gegeben sind die Funktionen g und h durch $g(x) = x^2 \cdot \ln(x)$ und $h(x) = x^3 \cdot \ln(x)$.
Zeige, dass f aus Beispiel 1 sowie g und h an der Stelle $x=1$ dieselbe Steigung haben. Ermittle die Gleichung der Tangente, die die zu f, g und h gehörenden Graphen im Punkt (1 / ??) haben.

Aufgabe 60:

Warum haben alle Graphen der Schar genau eine Nullstelle?
Zeige, dass alle Graphen der zu “$f_k(x) = x^k \cdot \ln(x)$” gehörenden Funktionenschar ($k \in \mathbb{N}$) in ihrer Nullstelle dieselbe Steigung haben.

Beispiel einer Kurvendiskussion

Gegeben ist f durch $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

1. $D_{max} = \mathbb{R}^+$ (die Menge aller positiven reellen Zahlen), da ln(x) nur für positive Zahlen definiert ist. Wenn f nur für positive Zahlen definiert ist, erübrigt es sich, eine Symmetrieuntersuchung durchzuführen.
2. Ein Bruch hat genau an den Stellen den Wert Null, an denen der Zähler den Wert Null hat und der Nenner von Null verschieden ist.
   Da $\ln(1) = 0$, schneidet der Graph von f die x-Achse im Punkt (1/0).
3. Es gilt $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$. Die Ableitung von f lässt sich also mit Hilfe der Produktregel ermitteln:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \\ &= -\frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln(x)) \end{aligned}$$

Um die zweite Ableitung bestimmen zu können, muss die Ableitung von “$\frac{1}{x^2}$” ermittelt werden: Wie so oft hilft wieder einmal die Kettenregel. [9]

Die durch $g(x) = \frac{1}{x^2}$ definierte Funktion g ergibt sich durch die Hintereinanderausführung der Funktionen h und i: $g(x) = h(\, i(x)\,)$, wobei $i(x) = x^2$ und $h(x) = \frac{1}{x}$.

$$\mathbf{g'(x) = h'(\, i(x)\,) \cdot i'(x)}$$

Da $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$, folgt: $h'(\, i(x)\,) = -\frac{1}{(\, i(x)\,)^2}$. Damit gilt:

$$h'(\, i(x)\,) \cdot i'(x) = -\frac{1}{(\, x^2\,)^2} \cdot 2x$$

$$g'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

---

9 Man kann die Ableitung auch unter Benutzung der Produktregel bestimmen, wenn man den Bruch $\frac{1}{x^2}$ in das Produkt $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$ umformt.

Nun lässt sich mit Hilfe der Produktregel auch $f''(x)$ bestimmen:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln(x))$$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} \cdot (1 - \ln(x)) + \frac{1}{x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{2}{x^3} \cdot (1 - \ln(x)) - \frac{1}{x^3}$$

$$= \frac{1}{x^3} \cdot (-2 + 2\ln(x) - 1)$$

$$= \frac{1}{x^3} \cdot (2\ln(x) - 3)$$

f kann (muss nicht!!) nur an den Stellen relative Extrema haben, an denen der Graph von f eine waagerechte Tangente hat (eine notwendige Bedingung dafür, dass f an der Stelle x_E ein relatives Extremum hat, ist $f'(x_E) = 0$). Die Stellen waagerechter Tangenten sind die Lösungen der Gleichung $\frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln(x)) = 0$. Da $\frac{1}{x^2}$ nie den Wert Null annimmt, braucht nur der zweite Faktor betrachtet zu werden:

$$1 - \ln(x) = 0$$
$$\ln(x) = 1$$
$$x = e^1$$

Der Graph von f hat also nur an der Stelle $x_E = e$ eine waagerechte Tangente.

Da außerdem $f''(e) = \frac{1}{e^3} \cdot (2\ln(e) - 3)$

$$= \frac{1}{e^3} \cdot (2 - 3)$$

$$= -\frac{1}{e^3}$$ gilt,

muss f an der Stelle $x_E = e$ ein relatives Maximum haben.

Der Graph von f kann nur dann an einer Stelle x_W einen Wendepunkt haben, wenn $f''(x_W) = 0$ gilt. Die Lösung von $\frac{1}{x^3} \cdot (2\ln(x) - 3) = 0$ ergibt sich aus

$$2\ln(x) - 3 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ln(x) = 1{,}5.$$

$$x_W = e^{1{,}5}$$

Eine Überprüfung mit Hilfe von f''' ersparen wir uns. Dass der Graph von f tatsächlich an der Stelle $e^{1{,}5}$ einen Wendepunkt besitzt, ergibt sich aus dem Verhalten von f für sehr große x-Werte, das wir im nächsten Punkt untersuchen werden.

4. Verhalten von f am Rand von D_{max} . (f ist für alle reellen Zahlen, die größer als Null sind, definiert. Man sagt dann auch: f ist auf dem **offenen Intervall**] 0 / ∞ [definiert. Die eckigen Klammern zeigen von “0" und “∞” weg, weil dies keine Elemente sind, die zum Intervall dazugehören sollen. “0 ” und “∞” bezeichnet man als die beiden Ränder von] 0 / ∞ [.)

a) Es gilt $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Nähert sich x dem Wert Null, so wird der Zähler beliebig klein ($\ln(x) \rightarrow -\infty$) . Damit werden die Werte des Bruches aber ($x>0$!!) erst recht beliebig klein: “ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ “.

(Der Graph nähert sich beliebig genau der y-Achse.)

b) Für $x \rightarrow \infty$ wachsen der Zähler und der Nenner unbeschränkt. Wir müssen mit dem Taschenrechner (siehe Seite 26) das Verhalten von f für sehr große x untersuchen.

$$f(50) = \frac{\ln(50)}{50} \quad (\approx 0{,}078)$$

$$f(100) = \frac{\ln(100)}{100} \quad (\approx 0{,}046)$$

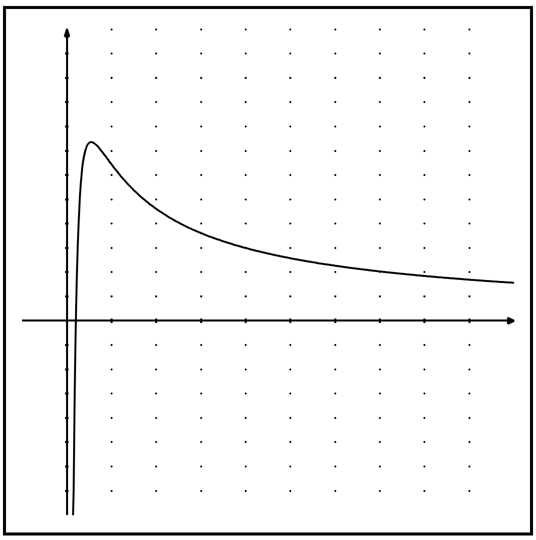
$$f(1000) = \frac{\ln(1000)}{1000} \quad (\approx 0{,}0069)$$

Offenbar nähert sich der Graph von f für wachsende x asymptotisch von oben der x-Achse.

Fassen wir zusammen:

Der Graph hat für $x<1$ negative Funktionswerte, an der Stelle $x=1$ wird das einzige Mal die x-Achse geschnitten, für $x>1$ sind die Funktionswerte alle positiv, an der Stelle $x_E = e$ hat f ein relatives Maximum und für große x nähert sich der Graph asymptotisch der x-Achse. Damit ist offensichtlich, dass der Graph für (mindestens) ein $x>e$ einen Wendepunkt haben muss. (Mehr als einen Wendepunkt, nämlich den an der Stelle $x_W = e^{1,5}$, kann es natürlich nach den Untersuchungen unter 3. auch nicht geben.)

Der Graph muss also grundsätzlich das folgende Aussehen haben:



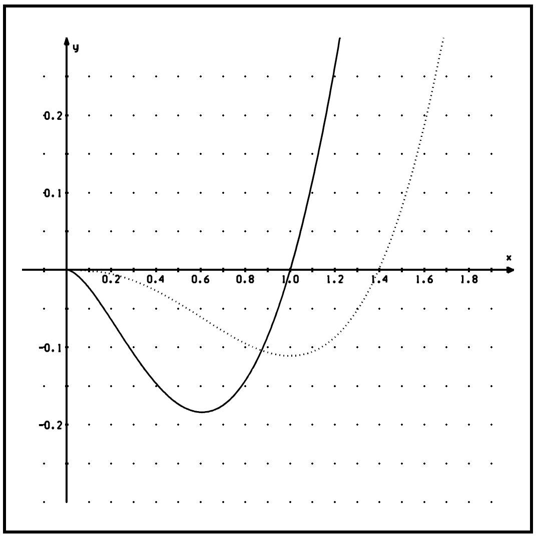
Leider habe ich vergessen, Näherungswerte für die Funktionswerte an den Stellen e und $e^{1,5}$ auszurechnen. (Die Achsen habe ich auch nicht beschriftet.)

Kann man das für mich erledigen?

Aufgabe 61:
Gegeben ist f durch $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$.
Bestimme D_{max} und untersuche f am Rand von D_{max} . Für welche x-Werte sind die Funktionswerte positiv, für welche negativ?
Wie verhält sich $f'(x)$ für $x \to 0$? (Taschenrechner!)
Skizziere nun den Graphen von f unter der Voraussetzung, dass der Graph nicht mehr Wendepunkte hat, als es nach den obigen Ergebnissen unbedingt erforderlich ist.

Aufgabe 62:
Führe eine ausführliche Kurvendiskussion am Beispiel "$f(x) = x \cdot \ln(x)$" durch. Untersuche insbesondere, wie sich f´ für $x \to 0$ verhält.

Aufgabe 63:



Links sind der Graph einer Funktion f und einer Stammfunktion von F dargestellt.

a) Welcher Graph gehört zu f und welcher zu F? (Bitte auf einen fachsprachlich korrekten Text achten.)
b) Wie lässt sich näherungsweise mit Hilfe des Graphen von F der Inhalt der Fläche berechnen, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt? (Begründe das Vorgehen kurz und gib den Näherungswert an.)

Aufgabe 64:
Zeige, dass durch " $F(x) = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9}$ " eine Stammfunktion von f ($f(x)=x^2 \cdot \ln(x)$) definiert wird.

a) Berechne $\int_{0,1}^{1} f(x)\,dx$ und $\int_{0,01}^{1} f(x)dx$.
b) Berechne für $0<a<1$: $\int_{a}^{1} f(x)\,dx$. Warum muss dieser Wert für jedes a negativ sein?
c) Berechne (Taschenrechner für die Grenzwertberechnung einsetzen!) den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

Aufgabe 65:
Bestätige durch Berechnung des absoluten Minimums und des Wendepunkts, dass in Aufgabe 63 der zu $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$ gehörende Graph dargestellt wird.

Ergänzung zu den Aufgaben 61 - 63

Die durch $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$ definierte Funktion ist nur für $x > 0$ definiert.
Der Computerausdruck macht jedoch den Eindruck, als ob der Graph direkt "in den Ursprung hineinläuft". Fachsprachlich korrekt ausgedrückt: Der Verlauf des Graphen von f lässt vermuten, dass $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 0$ gilt. Wir können hier **nicht beweisen**, dass dies tatsächlich gilt, können **aber** diese Tatsache **bestätigen**, indem wir mit dem TR z.B. f(0,1) und f(0,01)[10] näherungsweise berechnen.
Definieren wir nun einfach **f(0) = 0**, ist f für alle nicht negativen Werte definiert.[11]
Frage:
Wie nähert sich der Graph von f dem Ursprung? Präzieser: Wie verändern sich die Steigungen von f, wenn man sich dem Ursprung nähert?
Für positive x-Werte kann man f´(x) berechnen:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\
&= x \cdot (2 \cdot \ln(x) + 1) \\
f'(0,1) &= 0,1 \cdot (2 \cdot \ln(0,1) + 1) \\
&\approx -0,36 \\
f'(0,00001) &= 0,00001 \cdot (2 \cdot \ln(0,00001) + 1) \\
&\approx -0,00022
\end{aligned}
$$

Die Tangentensteigungen werden offenbar für $x \to 0$ immer **größer** (!!!) , sie konvergieren gegen den Wert Null.[12]
Im Ursprung selbst lässt sich jetzt sogar "zu Fuß" f´(0) berechnen:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{f(h) - f(0)}{h} \\
&= \frac{f(h)}{h} \\
&= \frac{h^2 \cdot \ln(h)}{h} \\
&= h \cdot \ln(h)
\end{aligned}
$$

$\lim\limits_{x \to +0} h \cdot \ln(h) = 0$ ist uns aber schon bekannt.

---

10 $f(0,01) \approx 0,0005$

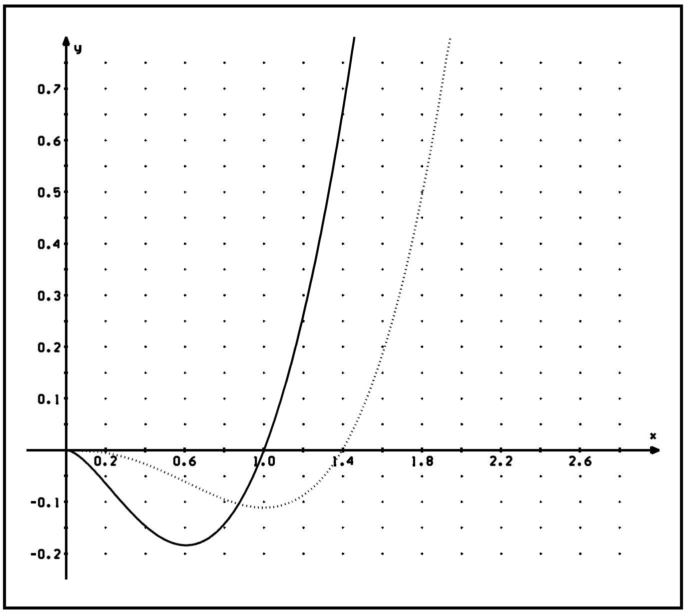
11 Dies ist für einen Mathematiker deshalb eine sinnvolle Definition, weil sich der Punkt (0/0) "nahtlos" dem Verlauf Graphen von f für $x > 0$ anfügt.

12 Natürlich haben allen Tangenten für $0 < x < 1$ **negative** Steigungen.

Also gilt:

$$\lim_{x \to +0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = 0 \quad \text{oder kürzer: } f'(0) = 0.$$

Der Graph von f hat im Ursprung die x-Achse als Tangente!
Der Graph von f nähert sich für x → 0 asymptotisch von unten der x-Achse!



$f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$
$f(0) = 0$

$F(x) = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9}$
$F(0) = 0$

Argumentation über Steigungen

Im Rahmen der Zeichengenauigkeit lässt sich feststellen:

1a. Der gestrichelte Graph hat an der Stelle $x=1$ ein relatives Minimum.
1b. Der durchgezogene Graph hat an dieser Stelle eine Nullstelle.

2a. Der gestrichelte Graph hat an der Stelle $x=0{,}6$ die geringste Steigung.
2b. Der durchgezogene Graph hat an dieser Stelle seinen tiefsten Punkt (die zugehörige Funktion hat an dieser Stelle ihren kleinsten Funktionswert).

3. Der durchgezogene Graph hat an allen Stellen negative Funktionswerte, wo die Tangenten an den gestrichelten Graphen negative Steigungen haben.

4. Entsprechendes lässt sich über die Stellen des durchgezogenen Graphen mit positiven Funktionswerten sagen.

Fazit: Offenbar gehört der durchgezogene Graph zur Ableitung der Funktion, deren Graph gestrichelt ist: $\mathbf{f}_{\textbf{durchgezogen}} = \mathbf{f}_{\textbf{gestrichelt}}'$

Zur Vereinfachung bezeichnen wir nun:

$$\mathbf{f}_{\textbf{durchgezogen}} = \mathbf{f} \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_{\textbf{gestrichelt}} = \mathbf{F}$$

Argumentation über Flächeninhalte

F definiert offenbar eine Integralfunktion von f : $F(x) = I_0(x)$ ($= \int_0^x f(t)dt$).

Eine Bestätigung ergibt sich aus $\int_0^{1,4} f(x)dx \approx 0$. (Man erinnert sich hoffentlich, dass Integralfunktionen stets Stammfunktionen sind!) Können Sie eine weitere Bestätigung formulieren?

Aufgabe 66 [13]**:**
Gegeben ist die Funktionenschar (f_n) durch $f_n(x) = x^n \ln(x)$ mit $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeige, dass jede Funktion der Schar ein absolutes Minimum hat.

b) Welcher Graph hat keinen Wendepunkt?

c) Zeige, dass für eine Wendestelle x_{W_n} stets $x_{W_n} < x_{E_n}$ gelten muss. (x_{E_n} ist die Stelle, an der jeweils das Extremum liegt.)

d) Wie verändert sich die Lage der Minima mit wachsendem n?

e [14]) Welche Grenzfunktion müssen die f_n für wachsendes n auf dem Intervall [0/1] beliebig genau annähern? (Kurze textliche Begründung.)

f) Zeige, dass die Funktion F_n , die durch

$$F_n(x) = \frac{1}{(n+1)^2}\, x^{n+1} \left((n+1) \ln(x) - 1 \right)$$

definiert ist, eine Stammfunktion von f_n ist.

g) Berechne den Inhalt A(n) der Fläche, die die Graphen jeweils mit der x-Achse und der Parallelen zur y-Achse durch (a/0) einschließen. (Es sei $0<a<1$.) Welchen Wert hat $\lim\limits_{a \to 0} A(n)$?

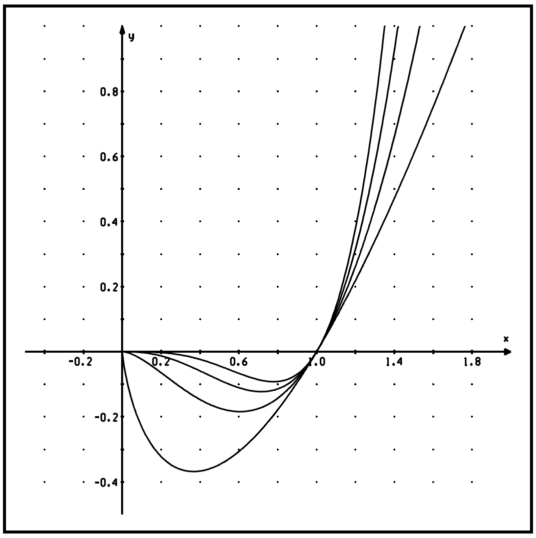
h) Betrachte das Verhalten (TR benutzen!!) von f_1' und f_2', f_3' , wenn sich x immer mehr dem Wert Null nähert ($x \to 0$). Beschreibe nun das Verhalten der Graphen von f_1 und f_2 , f_3 für $x \to 0$.

---

13 Diese Aufgabe ist in einigen Teilen wahrlich nicht leicht. Also nicht frustriert sein, wenn manche Teilaufgabe nicht gelöst werden kann. (Wenn man sich aber nie an schwierigen Dingen versucht, …)

14 Tipp: Man beachte die Teilaufgaben a), d) und berechne konkret für n=1, n=2, n=3,… die Extrema. Wenn man dann den Verlauf der Graphen für n=1,… skizziert, kommt man hoffentlich auf die entscheidende Idee. Wenn nicht, skizziere man für n = 10 bzw. n = 100.

Zu Aufgabe 66:



Es gilt $f_n'(x) = x^{n-1}(n \cdot \ln(x) + 1)$.

Alle Funktionen der Schar haben ein relatives Minimum im Punkt $\left(e^{-\frac{1}{n}} / -\frac{1}{n \cdot e} \right)$.

Durch Berechnung geeigneter Funktionswerte stellt man fest, dass sich alle Graphen beliebig genau dem Ursprung (0/0) annähern.

Für große x-Werte wachsen die Funktionswerte unbeschränkt.

Da $f(x_{E_a}) = -\frac{1}{n \cdot e}$ negativ ist, kann es links von der Stelle $e^{-\frac{1}{n}}$ keinen Funktionswert geben, der kleiner als $f(x_{E_a})$ ist. Andernfalls müsste der Graph ein weiteres relatives Minimum haben, da sich die Funktionswerte für $x \to 0$ dem Wert Null beliebig genau annähern. Entsprechend kann es für $x > e^{-\frac{1}{n}}$ keinen kleineren Funktionswert als $-\frac{1}{n \cdot e}$ geben, da sonst für $x > e^{-\frac{1}{n}}$ auch ein weiteres relatives Minimum existieren müsste, da die Funktionswerte für $x \to \infty$ unbeschränkt wachsen.

In den Punkten $\left(e^{-\frac{1}{n}} / -\frac{1}{n \cdot e} \right)$ müssen also absolute Minima vorliegen.

Gegeben ist die Funktionenschar (f_a) durch $f_a(x) = \frac{1}{x} \cdot (\ln(x) + a)$.

Alle Graphen der Schar besitzen ein relatives Maximum.
Beweis:

$$f_a'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot (\ln(x) + a) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f_a'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot (\ln(x) + a - 1)$$ Auf die Vorzeichen/Rechenzeichen achten!

Waagerechte Tangenten liegen also an den Stellen $x_{E\,a} = e^{1-a}$: Nur der zweite Faktor im Funktionsterm von $f_a{}'$ (also ln(x) + a - 1) kann den Wert Null annehmen!
Aus ln(x) + a - 1 = 0 folgt ln(x) = 1 - a . Damit ist 1 - a diejenige Zahl, mit der man e potenzieren muss, um x zu erhalten:

$$\boxed{\textbf{!!!} \qquad \ln(e^{1-a}) = 1 - a \qquad \textbf{!!!}}$$

$$f_a''(x) = \frac{2}{x^3} \cdot (\ln(x) + a - 1) - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f_a''(x) = \frac{1}{x^3} \cdot (2\ln(x) + 2a - 2 - 1)$$

$$f_a''(x) = \frac{1}{x^3} \cdot (2\ln(x) + 2a - 3)$$

$$f_a''(e^{1-a}) = \frac{1}{(e^{1-a})^3} \cdot (2(1-a) + 2a - 3)$$

$$f_a''(e^{1-a}) = \frac{1}{(e^{1-a})^3} \cdot (2 - 2a + 2a - 3)$$

$$f_a''(e^{1-a}) = -\frac{1}{(e^{1-a})^3}$$ < 0, da der Term e^x nur positive Werte annimmt.

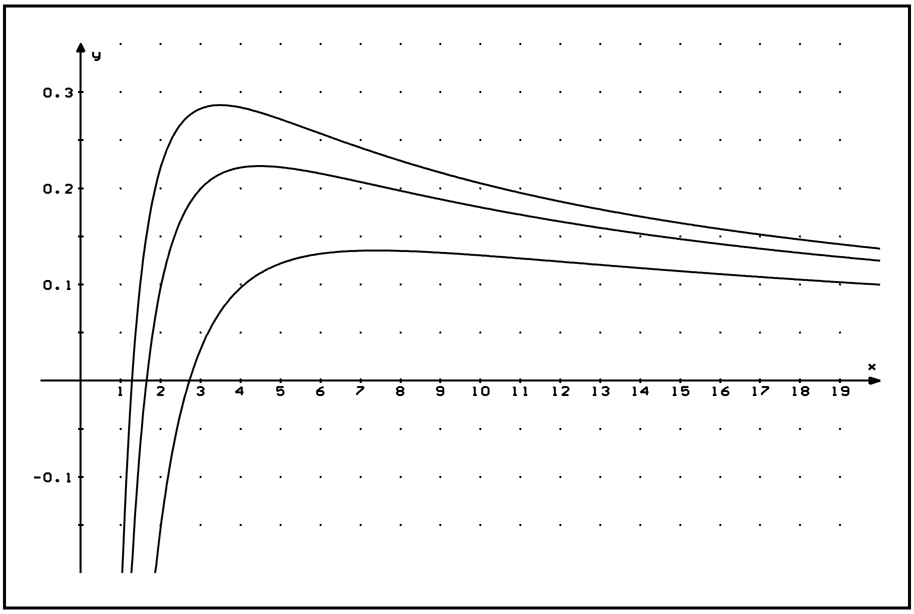
Da $f_a'(e^{1-a}) = 0$ und $f_a''(e^{1-a}) < 0$ für jedes a gilt, hat jeder Graph der Schar an der Stelle $x_E = e^{1-a}$ ein relatives Maximum.

Die Funktionswerte an diesen Stellen: $f_a(e^{1-a}) = \frac{1}{e^{1-a}} \cdot (1 - a + a)$

$$f_a(e^{1-a}) = e^{a-1}$$

Aufgabe 67:

a) Bestätige, dass in der folgenden Graphik die zu a = - 0,25; a = - 0,5 und a = - 1 gehörenden Graphen der Schar (siehe S. 53) dargestellt werden. (Berechne unter Verwendung der Ergebnisse auf Seite 53 Näherungswerte für die Nullstellen, relativen Extremwerte und Wendepunkte und vergleiche die Ergebnisse mit der Zeichnung.)



b) Zeige, dass durch $F_a(x) = 0{,}5 \cdot (\ln(x))^2 + a \cdot \ln(x)$ eine Stammfunktion zu f_a definiert wird.

c) Zeige $\int_{e^{-a}}^{e^{1-a}} f_a(x)dx = 0{,}5$ und $\int_{e^{1-a}}^{e^{1,5-a}} f_a(x)dx = 0{,}625$.

Interpretiere diese Ergebnisse.

d) Zeige, dass die Extrempunkte auf der durch $g(x) = \frac{1}{x}$ definierten Kurve liegen.

Zeichne diese Kurve in der obigen Graphik ein.

Warum kann nicht jeder Punkt des Graphen von g auch ein Extrempunkt eines Graphen der Schar (f_a) sein?

Teste Dich selbst

(Lösungen folgen!)

Aufgabe Ü1:

Gegeben ist die Funktionenschar (f_a) durch $f_a(x) = (2x - a)\, e^{0,5x}$

Bestimme die Funktionsgleichung g für die Kurve, auf der die Extrempunkte der einzelnen Graphen der Schar liegen.

Warum muss jeder Graph wenigstens einen Wendepunkt besitzen? Berechne allgemein die Koordinaten der Wendepunkte.

Skizziere den Graphen von g und die Graphen für a = 1; a = 2; a = 5 und a = - 1.

Aufgabe Ü2:

Gegeben ist die Funktionenschar (f_k) durch $f_k(x) = xe^{kx}$.

a) Bestimme für $k = \frac{1}{3}$ die Gleichung der Tangente im Wendepunkt.

b) Zeichne die Tangente und skizziere anschließend den Graphen von $f_{\frac{1}{3}}$.

c) Berechne für vier selbst gewählte Parameter konkret die Koordinaten der Extrempunkte.

d) Bestimme die Funktionsgleichung für den Graphen, auf dem die Extrempunkte der Graphen der Schar liegen.

Aufgabe Ü3:

Gegeben ist die Schar (f_a) durch $f_a(x) = a \cdot \ln(x)\,(1 - 0,5 \ln(x))$

a) Führe eine Kurvendiskussion für a = 1 durch.

b) Begründe, dass alle Graphen der Schar an derselben Stelle einen Extrempunkt haben müssen.

c) Skizziere die Graphen für a = 1; 2 und 3 im gleichen Koordinatensystem.

d) Zeige, dass durch $F(x) = -0,5x \cdot (\ln(x))^2 + 2x \cdot \ln(x) - 2x$ eine Stammfunktion von f_1 definiert wird. Bestimme nun den Inhalt A der Fläche, die der Graph von f_1 mit der x-Achse einschließt.

Gib unter Benutzung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung einen Näherungswert für A an. (Verdeutlichung an der Graphik wird erwartet.)

Aufgabe Ü4:

Gegeben ist die Funktionenschar (f_a) durch $f_a(x) = \ln(x) \cdot (\ln(x) - a)$; $(a>0)$.

a) Für welche Argumente sind die Funktionswerte von f_a positiv, für welche negativ?

b) Untersuche das Verhalten von f_a am Rand von D_{max} .

c) Gibt es einen Graphen der Schar, der die x-Achse berührt?

c) Begründe, dass jede Funktion der Schar ein absolutes Minimum haben muss.

d) Bestimme die Gleichung für den Graphen G_E , auf dem diese Extrempunkte liegen.
Gibt es zu jedem Punkt auf dem Graphen G_E eine Kurve der Schar, deren Extrempunkt auf G_E liegt?

e) Skizziere die Graphen der Schar für a = 1 ; 2 und 3 .

Aufgabe Ü5:

Gegeben ist die Funktionenschar (f_a) durch $f_a(x) = \ln(x^2 + a)$.

a) Gib D_{max} in Abhängigkeit von a an und untersuche die Graphen auf Nullstellen.

b) Für welche Parameter haben die zugehörigen Graphen der Schar Extrempunkte?
Für welche Parameter haben die zugehörigen Graphen keine Wendepunkte?

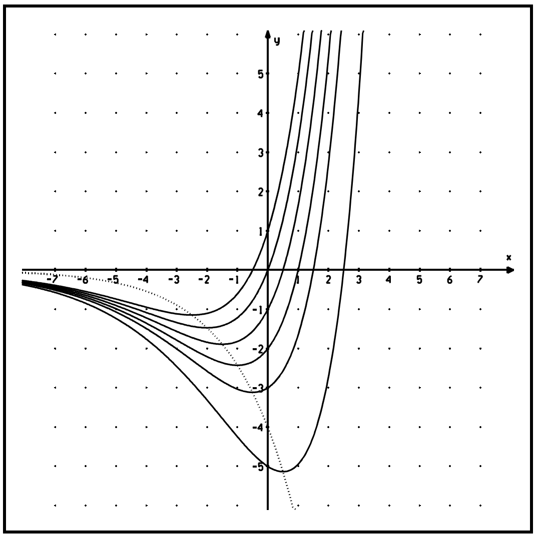
c) Für welche Parameter liegen die Extrempunkte oberhalb der x-Achse?

d) Für welche Parameter liegen die Wendepunkte unterhalb der x-Achse?

e) Welcher Graph schneidet die y-Achse im Punkt (0/-5) ?

f) Welcher Graph hat seine Wendepunkte auf der x-Achse?

Zu Aufgabe Ü1:



$f_a(x) = (2x - a)\, e^{0,5x}$

$f_a'(x) = (x - 0,5a + 2)\, e^{0,5x}$

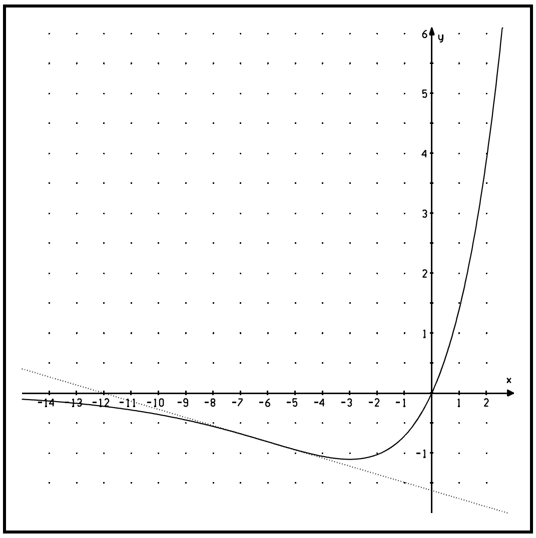
$f_a''(x) = (0,5x - 0,25a + 2)\, e^{0,5x}$

$f_a'''(x) = (0,25x - 0,125a + 1,5)\, e^{0,5x}$

Min $(0,5a - 2 \,/\, -4\, e^{-1 + 0,25a})$

W $(0,5a - 4 \,/\, -8\, e^{-2 + 0,25a})$

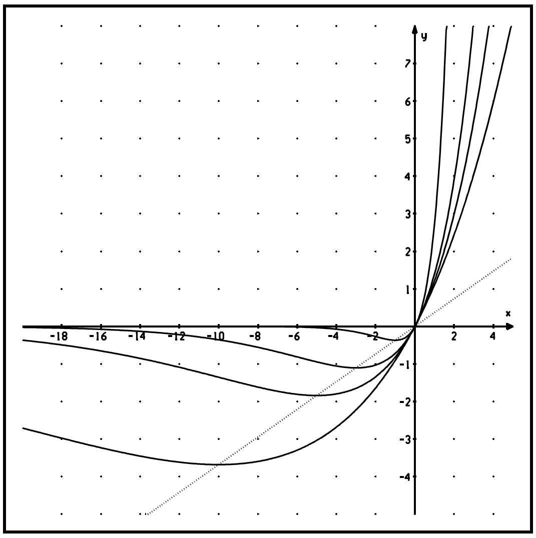
Extremwertkurve: $g(x) = -4\, e^{0,5x}$



Zu Aufgabe Ü2:

$f_k(x) = xe^{kx}$ für $k = 1/3$:

$t_W(x) = -e^{-2}x - 12 / e^2$

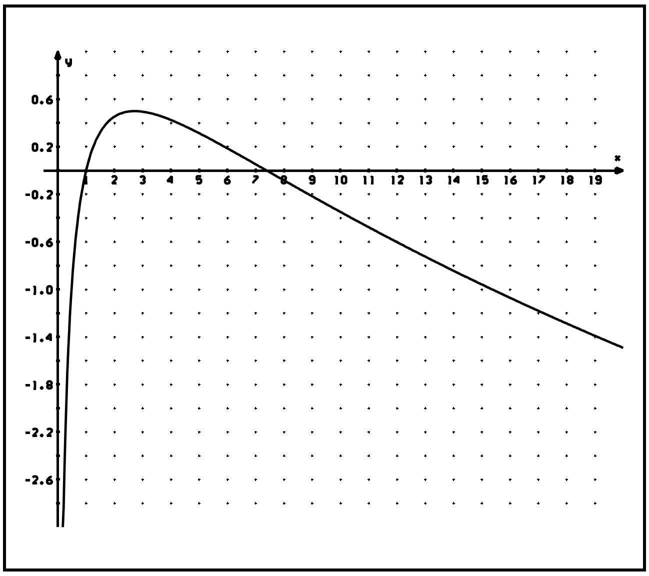


Kurve der Extrema:

$g(x) = \frac{1}{e} \cdot x$

Graphen für $k = 0,1$; $0,2$; $1/3$; 1

Zu Aufgabe Ü3:



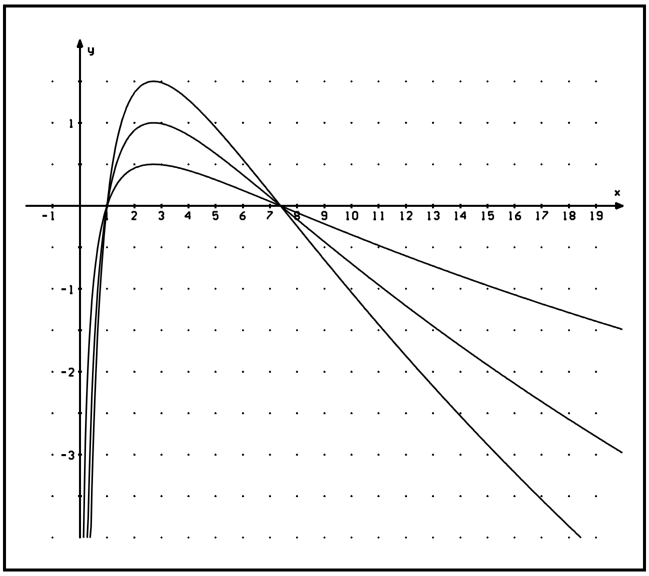
$f_a{}'(x) = ax^{-1} (1 - 1 \ln(x))$

$f_a{}''(x) = ax^{-2} (- 2 + \ln(x))$
$f_a{}'''(x) = ax^{-3} (5 - 2 \ln(x))$

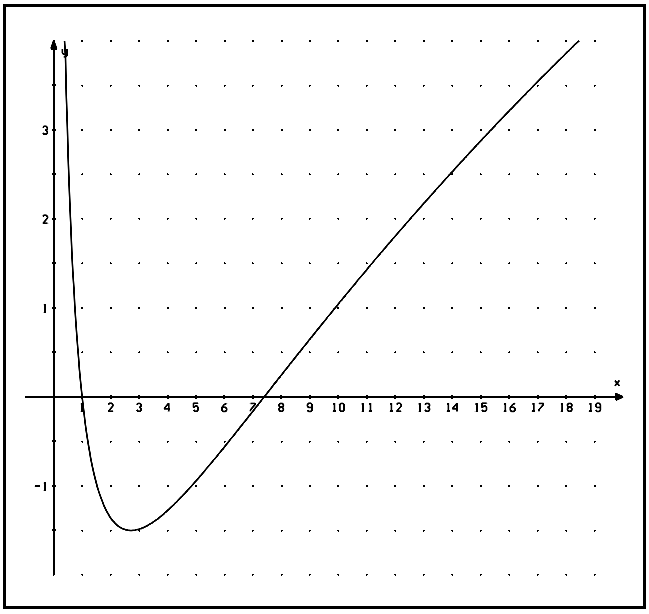
MAX (e / 0,5a)

WPT (e^2 / 0)

$$\int_1^{e^2} f_1(x)dx = 2$$

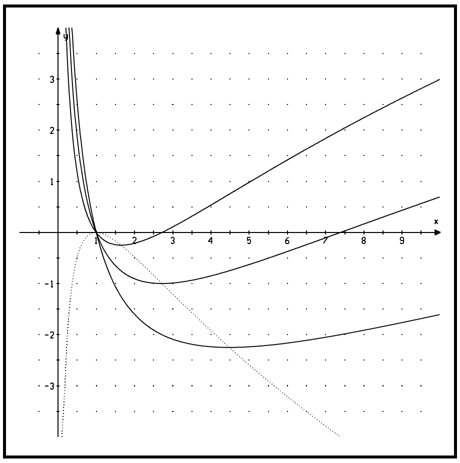


a = 1 ; 2 ; 3



a = - 3

Zu Aufgabe Ü4:



Nullstellen: 1 und e^{a}

Extrempunkte: $\left(e^{\frac{a}{2}} \;/\; -\frac{a^2}{4} \right)$

Extremwertkurve: $g(x) = -(\ln(x))^2$

Wendepunkte: $\left(e^{\frac{a+2}{2}} \;/\; -\frac{a^2}{4} + 1 \right)$

Für $x < 1$ sind beide Faktoren im Funktionsterm von f_a negativ.
Für $1 < x < e^a$ ist ln(x) positiv und ln(x) - a ist negativ.
Für $x > e^a$ sind beide Faktoren im Funktionsterm positiv.
Da $a > 0$ vorausgesetzt ist, liegt kein Extrempunkt auf der x-Achse.

Zu Aufgabe Ü5:
Fall 1: Wir betrachten die Funktionenschar nur für positive Parameter.
Offensichtlich ist dann für jede Funktion der Schar $\mathbb{R}$ der maximal mögliche Definitionsbereich, da für positive $a \in \mathbb{R}$ der Term $x^2 + a$ stets positiv ist.

Jeder Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Nullstellen sind die Lösungen der Gleichung $x^2 + a = 1$: $x_{N_{1,2}} = \pm\sqrt{1-a}$.

Die Graphen können also eine $(a=1)$, zwei $(0<a<1)$ oder gar keine Nullstellen $(a>1)$ haben.

$$f_a{}'(x) = \frac{1}{x^2+a} \cdot 2x$$ [15]

$$f_a{}''(x) = -\frac{1}{(x^2+a)^2} \cdot 2x \cdot 2x + \frac{1}{x^2+a} \cdot 2$$ [16]

Bringt man beide Summanden auf denselben Nenner $(x^2 + a)^2$, erhält man:

$$f_a{}''(x) = -\frac{4x^2}{(x^2+a)^2} + \frac{2(x^2+a)}{(x^2+a)^2}$$

$$f_a{}''(x) = \frac{2a - 2x^2}{(x^2+a)^2}$$

[15] Kettenregel und Ableitung von ln

[16] Kettenregel, Produktregel und Ableitung von 1/x wurden hier benutzt! **Ganz schön schwer**!!!

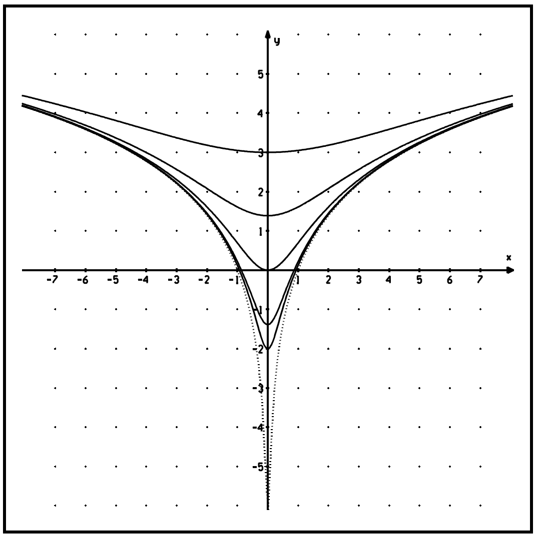
Die dritte Ableitung ersparen wir uns hier. [15]
Waagerechte Tangenten haben alle Graphen der Schar an der Stelle $x_0 = 0$.
Da $f_a''(0) = \frac{2}{a} > 0$ (a ist positiv!), haben wir an dieser Stelle sogar ein relatives Minimum.
In den Punkten (0/ln (a)) haben also alle Graphen einen “Tiefpunkt”. [16]
Offensichtlich haben auch alle Graphen Wendepunkte: $W_{a_{1,2}} (\pm \sqrt{a} \;/\; \ln(2a))$

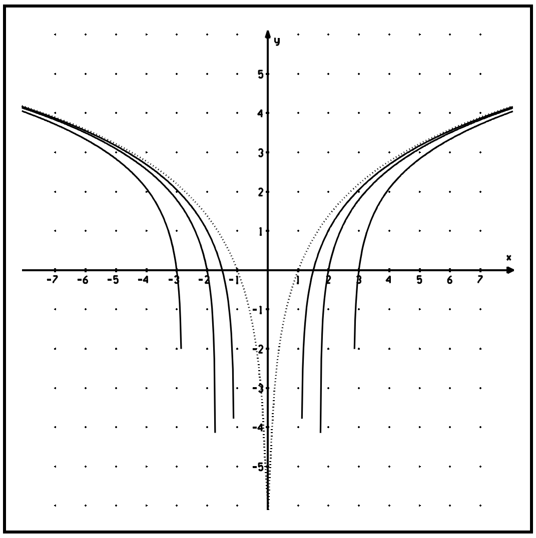
Fall 2: Für den Parameter $a = 0$ ergibt sich $f_0(x) = \ln(x^2)$. Dem Graphen dieser Funktion nähern sich alle anderen Graphen für sehr große und sehr kleine x-Werte beliebig genau an, da $x^2 + a \approx x^2$ für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$. Für **positive** x hat der Graph von f_0 dasselbe Aussehen wie der zu “2 ln (x)” gehörende Graph. (Warum???)

Fall 3: Aus den obigen Untersuchungen ergibt sich unmittelbar, dass alle Graphen für negative a zwei Nullstellen haben müssen. Wendepunkte kann es keine geben, da die zweite Ableitung für $a < 0$ an keiner Stelle den Wert Null annimmt. Extremstellen kann es auch nicht geben, da $f_a(0) = \ln(0+a)$ für negative Parameter nicht definiert ist.

Etwas schwieriger ist die Untersuchung von D_{max} :
$\ln(x^2 + a)$ ist nur definiert, wenn gilt: $x^2 + a > 0$. Es muss also $x^2 > -a$ gelten **(- a ist positiv, wenn a negativ ist!)**. Dies gilt genau dann, wenn $x < a$ oder $x > -a$. Es darf also nicht $a \leq x \leq -a$ gelten.

Welche Parameter wurden für die folgenden Graphen ausgewählt?





[15] Mit der Berechnung der zweiten Ableitung haben wir hinreichende Kenntnisse relativ zum bisher gelernten Stoff über Ableitungsregeln nachgewiesen.

[16] Man beachte wieder, dass a positiv ist.

Die Ableitung von Potenzfunktionen

Unter Potenzfunktionen versteht man Funktionen, die durch $f(x) = x^n$ $(x>0;\ n\in\mathbb{R})$ definiert sind. [17] Einfache Vertreter dieser Funktionen sind uns hinlänglich bekannt: "Die Winkelhalbierende des ersten und dritten Quadranten, die Normalparabel, die Wurzelfunktion, die durch $f(x) = \frac{1}{x}$ definierte Hyperbel,.....".

In Klasse 11 wurden auch die Ableitungen spezieller Potenzfunktionen ermittelt [18] :

Für $f(x) = \frac{1}{x}$ bzw. $f(x) = x^{-1}$ gilt

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ bzw. $f'(x) = -x^{-2}$.

Für $g(x) = \sqrt{x}$ bzw. $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$ gilt

$g'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$ bzw. $g'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$.

Dass $(x^4)' = 4x^3$ gilt, wissen wir sowieso.

Auf Seite 43 haben wir $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$ bewiesen.

Aus diesen Beispielen ergibt sich unmittelbar die Vermutung, dass **für alle Exponenten n**$\in\mathbb{R}$ (also nicht nur für natürliche Exponenten und $n = -2$; $n = -1$ sowie $n=0{,}5$) **gilt**:

$$\boxed{(x^n)' = n\cdot x^{n-1}}$$

17 Für ganzzahlige Exponenten n ist x^n auch für negative x-Werte definiert.

18 Sieh dazu ggf. im Prolog von "ma-1" nach.

Es genügt uns hier, den Beweis für die negativen ganzen Zahlen - 3; - 4; … zu führen. Er gelingt (analog zum Beweis auf Seite 44) mit Hilfe der Kettenregel.

Ist - n eine beliebige negative ganze Zahl ($n \in \mathbb{N}$), so gilt:

$$\mathbf{(x^{-n})'} = \left(\frac{1}{x^n}\right)'$$

$$= -\frac{1}{(x^n)^2} \cdot (x^n)'$$

$$= -\frac{1}{x^{2 \cdot n}} \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$= -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2 \cdot n}}$$

$$= -n \cdot x^{n-1-2n}$$

$$\mathbf{= -n \cdot x^{-n-1}}$$

Aufgabe 68:
Gib zu den folgenden Funktionen jeweils eine Funktionsgleichung für eine Stammfunktion an.
a) $f(x) = 4x^{-2}$ b) $f(x) = 0{,}5x^{-3}$ c) $f(x) = 6x^{-4}$ d) $f(x) = 0{,}1x^{-6}$

e) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ $(x>0)$ f) $f(x) = x - \frac{1}{x} + 2x^{-2}$

Aufgabe 69:

Warum lässt sich das Integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx$ nicht berechnen?

Aufgabe 70:

Für welche Werte von k lässt sich $\int_{k}^{1} \frac{1}{x}dx$ berechnen?

Für welche k ist $\int_{k}^{1} \frac{1}{x}dx$ positiv, für welche k ist der Wert dieses Integrals negativ?

(Bitte auf einen fachsprachlich korrekten Text achten.)

Aufgabe 71:
Zeige, dass der unendlich ausgedehnten Fläche, die durch die x-Achse, die Parallele zur y-Achse durch den Punkt (1/1) und den durch $f(x) = \frac{1}{x^2}$ definierten Graph für $x \geq 1$ eingeschlossen wird, ein endlicher Inhalt zugeordnet werden kann.
Zeige, dass dies nicht möglich ist, wenn f durch $f(x) = \frac{1}{x}$ definiert ist.

Aufgabe 72:

Berechne $\int_{1}^{4} (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})dx$ und schraffiere die Fläche, die diesen Inhalt hat, in einer Skizze.

(Achte auf einen sinnvollen Maßstab und vergleiche Rechnung und Zeichnung.)

Aufgabe 73:

Für welches k gilt $\int_{1}^{k} \frac{9}{x^3}dx = 4$? (Veranschauliche in einer Skizze.)

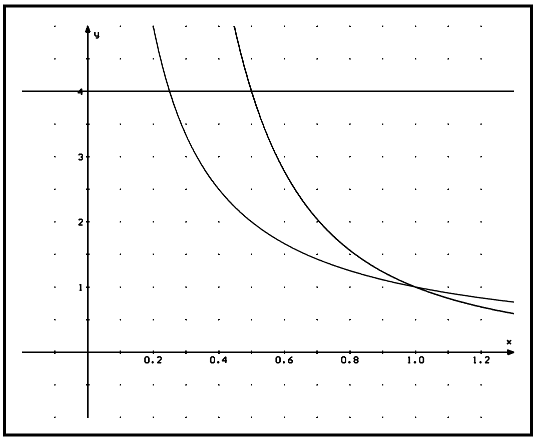
Aufgabe 74:
Gegeben ist f durch $f(x) = 4x^{-2}$. Bestimme die Gleichung der Tangenten t an der Stelle $x=2$. Welchen Inhalt hat die unendlich ausgedehnte Fläche, die vom Graphen von t, dem Graphen von f und der x-Achse im ersten Quadranten eingeschlossen wird?

Aufgabe 75:

Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

Bestimme den Inhalt der Fläche, die Graphen von f und g und die durch $a(x)=4$ definierte Parallele a zur x-Achse im ersten Quadranten miteinander einschließen.

Anleitungen zur Lösung:



Zur Veranschaulichung der Aufgabenstellung bietet es sich an, eine Skizze anzufertigen.
Dass sich die Graphen von f und g im Punkt (1/1) schneiden, ist offensichtlich. (Vokabelwissen, das auch unmittelbar an der Zeichnung nachvollzogen werden kann.) Für die weitere Rechnung müssen noch die Schnittstellen der Parallelen a mit den Graphen von f und g bestimmt werden. Diese Schnittstellen ergeben sich als Lösungen der Gleichungen $\frac{1}{x} = 4$ und $\frac{1}{x^2} = 4$.

Den gesuchten Flächeninhalt kann man bestimmen, wenn man $\int_{0,25}^{1} f(x)dx$ und $\int_{0,5}^{1} g(x)dx$ berechnet hat.

Aufgabe 76:

Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = \frac{4}{x^2}$ und $g(x) = 3x + 7$.

a) Bestimme die Schnittpunkte der Graphen von f und g.
b) Skizziere den Verlauf der Graphen im Intervall [- 4 / 2] .
c) Bestimme den Inhalt der Fläche, die im zweiten Quadranten von den beiden Graphen eingeschlossen wird.
d) Die Parallele zur y-Achse durch den Punkt (- 3/0), die x-Achse und die Graphen von f und g schließen eine Fläche ein. Schraffiere diese Fläche und berechne ihren Inhalt.
e) Stimmen die Ergebnisse aus c) und d) mit der Zeichnung überein?

Anleitung:

Zu a) Bestätige durch Polynomdivision, dass $(3x^3 + 7x^2 - 4):(x+1) = 3x^2 + 4x - 4$ gilt.

Zu d) Bestimme den Schnittpunkt der Geraden g mit der x-Achse.

Zahlenliebe

Die 2 und ihr Logarithmus,
die liebten einander so sehr;
ein rationales Verhältnis
schien ihnen das höchste Begehr.

Sie gingen zum strengen Gelehrten, —
der sprach: „Ja, was fällt Euch denn ein!
Ein rationales Verhältnis
zwischen Euch kann nimmermehr sein.

Du bist so ein Transzendenter
vom Zahlenproletariat,
sie ist im Primzahlenstaate
die Schönste, denn sie nur ist grad.“

Da rang sie verzweifelt die Hände,
doch er umarmte sie schnell:
„Ist's rational auch nicht möglich,
so geht es zumindest reell!“

$\log_{10}(2)$ rational ?

Dann müsste es natürliche Zahlen p und q mit $\log_{10}(2) = \frac{p}{q}$ geben.

Es würde also $10 = 2^{\frac{p}{q}}$ folgen, wobei p und q natürliche Zahlen sind.

(☹) [19]

---

[19] Es wäre natürlich noch zu beweisen, warum an dieser Stelle der Antismily erscheint.

Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme sind uns aus der Klasse 9 vertraut. Durch die beiden linearen Gleichungen

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x - 3y = -3 \quad \textbf{und} \\ \text{II} & -5x + 7y = 8 \end{array}$$

werden im zweidimensionalen Koordinatensystem zwei Geraden definiert. Das Bestimmen der Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems, das aus zwei Gleichungen und zwei Variablen besteht, entspricht -anschaulich- der Suche des Schnittpunkts der beiden Geraden (sofern dieser überhaupt existiert).
Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Lösungsmenge des Systems zu bestimmen:
Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren, Additionsverfahren (=Subtraktionsverfahren).
Das Additionsverfahren ist in den meisten Fällen den beiden anderen Verfahren vorzuziehen, da wesentliche Teile der Rechnung ohne Divisionen durchgeführt werden können und daher die Fehlerhäufigkeit geringer als bei den anderen Verfahren ist. Aus diesem Grund wird in den folgenden Ausführungen das Additionsverfahren favorisiert.

Zum Lehrplan der 9. Klasse gehört auch das Lösen von linearen Gleichungssystemen, die aus drei Gleichungen mit drei Variablen bestehen. Bei der Erstellung des Lehrplans wurde aber nicht berücksichtigt, dass ein zweiwöchiges Betriebspraktikum das ohnehin schmale Stundenvolumen um mindestens weitere sechs Stunden vermindert. Mir ist bekannt, dass aus diesen (und anderen) Gründen "3-3-System" in der 9. Klasse i. Allg. ein Schattendasein fristen. (Im Wahlpflichtfach ist das nicht so, aber nicht jeder Kursteilnehmer hatte das Wahlpflichtfach Mathematik.)

Auch während der 11. Klasse sollte man eigentlich "3-3-Systemen" begegnen:
- Welche Parabel geht durch die Punkte (1/2), (3/4) und (6/0)?
- Welche ganzrationale Funktion dritten Grades hat einen Graphen, der die x-Achse an der Stelle $x = -2$ berührt, sowie durch (-1/3) und den Ursprung verläuft? (Streng genommen führt diese Aufgabe auf ein "4-4-System".)

Für alle, die während der Unterrichtsstunden, in denen das "Gauß-Verfahren" behandelt wurde, gerade gefehlt haben, soll es hier noch einmal vorgestellt werden:

Gegeben sind drei lineare Gleichungen mit drei Variablen (also ein "3-3-System"):

$$\begin{array}{lrrrcr} \text{I} & 2x & -3y & +z & = & -11 \\ \text{II} & -3x & +y & -2z & = & 11 \\ \text{III} & x & +3y & -4z & = & 17 \\ \hline \end{array}$$

Jedes Lösungselement dieses Systems ist ein **Tripel** $(x_0/y_0/z_0)$ von Zahlen, dessen Komponenten (also x_0, y_0 und z_0) alle drei Gleichungen erfüllen müssen. Die **Lösungsmenge** des Gleichungssystems **besteht aus allen Tripeln**, deren Komponenten das **l**ineare **G**leichungssystem (LGS) erfüllen.

Man kann das LGS auf verschiedene Arten umformen, ohne dabei die Lösungsmenge des Systems zu verändern.

> Eine Äquivalenzumformung eines LGS ist eine Umformung des LGS, bei der die Lösungsmenge des LGS nicht verändert wird.

Ganz offensichtlich sind folgende “Manipulationen” **Äquivalenzumformungen**:

1. **Das Vertauschen der Reihenfolge der Gleichungen.**

2. **Die Multiplikation einer Gleichung mit einer von Null verschiedenen Zahl.**

Nicht unmittelbar einsichtig ist aber, dass

3. **die Addition eines Vielfachen einer Gleichung des Systems zu einer anderen Gleichung des Systems**

eine Äquivalenzumformung ist. Diese Tatsache soll an einem Beispiel erläutert werden. Der allgemeine Beweis wird im Prinzip genauso geführt.
Betrachten wir unser Ausgangssystem (Sys1) und parallel dazu das System Sys2:

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 2x - 3y + z & = & -11 \\
\text{II} & -3x + y - 2z & = & 11 \\
\text{III} & x + 3y - 4z & = & 17
\end{array} \quad \textbf{(Sys1)} \qquad
\begin{array}{llcl}
3\cdot\text{I} & 6x - 9y + 3z & = & -33 \\
2\cdot\text{II} & -6x + 2y - 4z & = & 22 \\
\text{III} & x + 3y - 4z & = & 17
\end{array} \quad \textbf{(Sys2)}$$

Jedes Tripel, das das linke System erfüllt, muss selbstverständlich auch das rechte System erfüllen **und umgekehrt**.

Wir ersetzen nun die zweite Gleichung von Sys2 durch die Summe der ersten und der zweiten Gleichung von Sys2:

$$\begin{array}{llcl}
3\cdot\text{I} & 6x - 9y + 3z & = & -33 \\
3\cdot\text{I}+2\cdot\text{II} & 6x - 9y + 3z - 6x + 2y - 4z & = & -33 + 22 \\
\text{III} & x + 3y - 4z & = & 17
\end{array} \quad \textbf{(Sys3)}$$

Jedes Tripel, das die Gleichungen von Sys2 erfüllt, ist offensichtlich auch eine Lösung von Sys3. Umgekehrt ist auch jede Lösung von Sys3 eine Lösung von Sys2. Diese beiden Gleichungssysteme müssen also dieselbe Lösungsmenge besitzen. (Sys2 ist äquivalent zu Sys3.)
Sys3 lässt sich einfacher schreiben:

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 2x - 3y + z & = & -11 \\
3\cdot\text{I}+2\cdot\text{II} & -7y - z & = & -11 \\
\text{III} & x + 3y - 4z & = & 17
\end{array} \quad \textbf{(Sys4)}$$

Addieren wir nun I und das -2fache von III, erhalten wir:

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 2x - 3y + z & = & -11 \\
3\cdot\text{I}+2\cdot\text{II} & -7y - z & = & -11 \\
\text{I}-2\cdot\text{III} & -9y + 9z & = & -45
\end{array} \quad \textbf{(Sys5)}$$

Durch “geschicktes Addieren” ergibt sich also ein “3-3-System”, in dem die beiden letzten Gleichungen nur noch zwei Variable enthalten:

I	$2x - 3y + z$	$= -11$	
II	$-7y - z$	$= -11$	**(Sys6)**
III	$y - z$	$= 5$	

Die dritte Gleichung dieses Systems wird durch 7·III+II ersetzt:

I	$2x - 3y + z$	$= -11$	
II	$-7y - z$	$= -11$	**(Sys7)**
III	$-8z$	$= 24$	

Aus III folgt: $z = -3$. Setzt man diesen Wert in II ein, erhält man $-7y = -14$, also $y=2$.
Setzt man die Werte für z und y in I ein, ergibt sich: $x = -1$.
(- 1 / 2 / - 3) ist also das Lösungselement des Ausgangssystems (und selbstverständlich aller weiteren Systeme, die wir durch Äquivalenzumformung aus Sys1 erhielten).

Fassen wir unser Vorgehen zusammen:
Durch Äquivalenzumformungen haben wir das Ausgangssystem auf **Dreiecksform** gebracht. Aus dieser Dreiecksform lässt sich das Lösungselement unmittelbar ermitteln.
Die Dreiecksform erhält man, wenn man sich schrittweise zuerst zwei Gleichungen verschafft, in denen nur noch zwei Variable vorkommen und aus diesen beiden Gleichungen eine weitere Variable eliminiert.

Anmerkungen:

- Das Ausgangssystem kann man auch durch andere Umformungen auf Dreiecksform bringen.

- Ein “3-3-System” muss nicht unbedingt genau eine Lösung haben.
  (Auch von “2-2-Systemen” ist bekannt, dass sie genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen haben können: Zwei lineare Gleichungen können zwei Geraden definieren, die sich in genau einem Punkt schneiden, parallel zueinander sind oder identisch sind.)

Aufgabe 77:
Gegeben ist das LGS (s.o.)

I	$2x - 3y + z$	$= -11$
II	$-3x + y - 2z$	$= 11$
III	$x + 3y - 4z$	$= 17$

a) Bestimme das Lösungselement, indem zuerst aus zwei Gleichungen y eliminiert wird.
b) Bestimme das Lösungselement, indem zuerst aus zwei Gleichungen z eliminiert wird.
c) Eliminiere auf einem anderen Weg, wie er im Beispiel gewählt wurde, die Variable x und bestimme dann das Lösungselement.

Aufgabe 78:
Gib ein “3-3-System” an, das kein Lösungselement hat.

Ein “2-3-System”

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x + y + z = 0 \\ \text{II} & 3x - y + 2z = 0 \end{array}$$

Ohne Rechnung findet man die Lösung (0/0/0). (6/2/- 8) ist aber auch eine Lösung, wie man leicht nachrechnen kann:
$6 + 2 - 8 = 0$!!! und $3 \cdot 6 - 2 + 2 \cdot (-8)$ ergibt auch Null.

Gibt es noch mehr Lösungen?
Wie findet man alle Lösungen?

Das Ausgangssystem lässt sich äquivalent umformen, indem man die zweite Gleichung durch I + II ersetzt:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x + y + z = 0 \\ \text{II} & 4x + 3z = 0 \end{array}$$

Eine weitere Vereinfachung ist nicht möglich und auch nicht nötig:
In II kann man für x beliebige Werte einsetzen, aus denen sich dann z ergibt. Setzt man diese beiden Werte in I ein, erhält man den zu diesen beiden Werten gehörenden y-Wert.

Allgemein sieht diese Rechnung folgendermaßen aus:

Wählt man sich in II irgendeinen Wert für x (x ist frei wählbar!), folgt $z = -\frac{4}{3} \cdot x$.

Setzt man nun in I ein, erhält man:

$x + y - \frac{4}{3} \cdot x = 0$ bzw. $y = \frac{1}{3} \cdot x$.

Jedes Lösungselement des Ausgangssystems hat also die Form $(x / \frac{1}{3} \cdot x / -\frac{4}{3} \cdot x)$.

Anmerkungen:
- Die zu Beginn gefundenen zwei Lösungselemente erhält man, wenn für x die Werte Null bzw. Sechs eingesetzt werden.
- Das vorgegebene lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.
- Selbstverständlich kann man auch z frei wählen und dann in der Rechnung entsprechend fortfahren.
- Es ließe sich auch zu Beginn die zweite Gleichung durch **II-2·I** ersetzen. Man erhält dann eine Gleichung, in der x oder y frei wählbar ist.

Aufgabe 79:
a) Wähle die in den Anmerkungen genannten Äquivalenzumformungen und bestimme die Lösungselemente des Systems. Vergleiche die Lösungsmengen.
b) Eliminiere x und bestimme dann die Lösungsmenge des Systems.

Ein Mischungsproblem

Es stehen drei Sorten Mehl zur Verfügung:
Sorte A kostet 2 DM/kg, Sorte B kostet 3 DM/kg und Sorte C kostet 5 DM/kg.
Aufgabe:
Es soll ein Kilogramm Mehl gemischt werden, das 3,20 € kostet und **irgendwelche** Mengen von Sorte A, B, C enthält.

- Welche Mischungen sind möglich?
- Wie viel kann die Mischung von den jeweiligen Sorten höchstens enthalten?
- Wie viel muss von den jeweiligen Sorten mindestens in einem Kilogramm enthalten sein?

Lösung:
Ich bezeichne mit a die Menge, die von Sorte A in der Mischung ist . (Entsprechend werden b und c festgelegt.)

$$\text{I} \qquad a + b + c = 1$$

Diese Gleichung muss erfüllt sein, da die Gesamtmenge der Mischung 1 (kg) betragen soll.

$$\text{II} \qquad 2a + 3b + 5c = 3{,}2$$

Diese Gleichung muss gelten, weil 2a der Preis (in €) ist, der für den Anteil von Sorte A in der Mischung bezahlt werden muss,…

Es entsteht damit ein LGS, das aus zwei Gleichungen besteht, in denen drei Variable auftreten:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a + b + c = 1 \\ \text{II} & 2a + 3b + 5c = 3{,}2 \end{array}$$

Dieses System formen wir äquivalent um, indem die erste Gleichung beibehalten wird und die zweite Gleichung durch die Summe aus einem Vielfachen der ersten und einem Vielfachen der zweiten Gleichung ersetzt wird. (Mit Null darf natürlich nicht multipliziert werden!)

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a + b + c = 1 \\ 2\text{I} + (-1)\text{II} & -b - 3c = -1{,}2 \end{array}$$

In der zweiten Gleichung kann b (oder c!! - siehe Schluss) beliebig gewählt werden. Die andere Variable läßt sich dann nach Wahl der ersten berechnen. Aus diesen beiden Werten bestimmt man dann a aus der ersten Gleichung:

Aus II folgt $b = 1{,}2 - 3c$ (c wähle ich beliebig).
In I : $a + (1{,}2 - 3c) + c = 1$ oder : $a + 1{,}2 - 2c = 1$ oder $a = 2c - 0{,}2$.

Damit ergibt sich als Lösungsmenge des obigen LGS folgende Darstellung:

$$\boxed{\mathbf{L = \{ (2c - 0{,}2 \,/\, 1{,}2 - 3c \,/\, c) \,/\, c \in \mathbb{R} \}}}$$

Dies war die "rein rechnerische" Lösung , ohne Beachtung des realen "Hintergrunds", denn:
Für irgendein c ist (2c - 0,2/ 1,2 - 3c / c) nur dann eine spezielle (**brauchbare!**) Lösung für unser Ausgangsproblem, wenn zusätzlich folgende Bedingungen erfüllt sind:

- **$c \geq 0$** (von der Sorte C können keine negativen Mengen in der Mischung sein).
- $1{,}2 - 3c \geq 0$ (von der Sorte B natürlich auch nicht).
- $2c - 0{,}2 \geq 0$ (und von A auch nicht).

Aus $1{,}2 - 3c \geq 0$ folgt $1{,}2 \geq 3c$ bzw. $0{,}4 \geq c$.
Für eine sinnvolle Lösung muss also c die Bedingung **$c \leq 0{,}4$** erfüllen.

Schließlich folgt noch aus $2c - 0{,}2 \geq 0$, dass $2c \geq 0{,}2$ bzw. **$c \geq 0{,}1$** gelten muss.

Fassen wir die drei Bedingungen, die wir für c erhalten haben, zusammen:

Nur für **$0{,}1 \leq c \leq 0{,}4$** erhalten wir Lösungen, die dem real gestellten Problem genügen.
Probe:

I $\quad \underbrace{2c - 0{,}2}_{a} + \underbrace{1{,}2 - 3c}_{b} + c = 1$ gilt für jedes c.

Also ist die Gleichung I stets erfüllt.

$$\text{II} \quad 2a + 3b + 5c = 2(2c - 0{,}2) + 3(1{,}2 - 3c) + 5c$$
$$= 4c - 0{,}4 + 3{,}6 - 9c + 5c$$
$$= 3{,}2 \,.$$

Die erste Frage ist damit beantwortet.

Nun zur Frage, **wie viel eine Mischung von jeder Sorte Mehl höchstens beinhalten kann:**
Wir wissen bereits, dass höchstens 400 g Mehl der Sorte C in der Mischung sein dürfen.
Die größtmögliche Menge von A erhalten wir gerade dann, wenn die Mischung möglichst viel von C enthält, da $a = 2c - 0{,}2$ (a ist am größten, wenn c am größten ist). Da 400 g die größtmögliche Menge von C ist, kann a höchtens 600 g groß sein ($2 \cdot 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}6$).

Von der Sorte B ist **dann** viel in der Mischung, wenn von c wenig genommen wird, da $b = 1{,}2 - 3c$. Weniger als 0,1 kg Mehl darf man aber von der Sorte C nicht nehmen. Also:
b wird am größten, wenn c am kleinsten ist : **$b_{max} = 0{,}9$.**

Antwort: Eine Mischung kann höchstens 600g von A, 900g von B und 400g von C enthalten (natürlich nicht gleichzeitig!).

Wie viel muss von jeder Sorte mindestens in einer Mischung enthalten sein?
Wir haben c "frei" gewählt und wissen: Weniger als nichts kann von C nicht in der Mischung sein; wir wissen sogar, dass $c \geq 0{,}1$ gelten muss. (Siehe oben.)

Wegen $b = 1{,}2 - 3c$ sieht man, dass die geringste Menge von B dann in der Mischung ist, wenn die Mischung viel von C enthält. Da c höchstens gleich 0,4 ist, wird b für $c = 0{,}4$ am kleinsten: $b = 0$.

Für a galt: $a = 2c - 0{,}2$. Von A hat man dann die geringste Menge, wenn c am kleinsten ist: $c = 0{,}1$ ist der kleinste Wert: Dann ist $a = 0$.

Eine Mischung kann also ohne Sorte A oder ohne Sorte B, aber nicht ohne Sorte C (davon müssen wenigstens 100g vorhanden sein) hergestellt werden. **Dies sollte auch ohne Rechnung klar sein, denn A und B kosten weniger als 3.-/kg und die Mischung soll 3,20.-/kg kosten.**

☺

Aufgabe 80:

a) Wie hätte die Rechnung ausgesehen, wenn b als "freier Parameter" gewählt worden wäre? (Bitte durchführen und die Ergebnisse mit der obigen Lösung vergleichen.)
b) Stell eine Mischung ohne Sorte A her.
c) Wie wird eine Mischung mit möglichst viel von Sorte C hergestellt?
d) Die Mischung soll möglichst viel von Sorte A enthalten.
e) Wie teuer muss die Mischung sein, damit man ohne Sorte C auskommt?

Wir betrachten allgemein eine Funktion f, deren Funktionswerte **stets in gleichen Abständen jeweils prozentual um denselben Wert wachsen**.
Gehen wir also einmal davon aus, dass der Funktionswert f(1) um 6% größer als der Wert f(0) ist, f(2) soll um 6% größer als f(1) sein,… . In Abständen (auf der x-Achse) von 1 wachsen die Funktionswerte also mit dem Wachstumsfaktor 1,06.
Für die Zahlen 0, 1, 2, 3, … lassen sich die Funktionswerte von f dann durch

$$\mathbf{f(x) = f(0) \cdot 1{,}06^{x}}$$

berechnen.
Es gilt also beispielsweise $f(19) = f(0) \cdot 1{,}06^{19}$
$f(19) \approx f(0) \cdot 3{,}0$
Das Kapital hätte sich nach 19 Jahren verdreifacht.

Problem: Wie kann f(0,5) berechnet werden? (In der obigen Funktionsgleichung wurde vorausgesetzt, dass x nur die Werte 0, 1, … annehmen darf.)

Lösung: Was wurde zu Beginn vorausgesetzt? Die Funktionswerte sollten **stets in gleichen Abständen jeweils prozentual um denselben Wert wachsen.**
Damit muss sich f(0) von 0 bis 0,5 mit demselben Wachstumsfaktor a vergrößern wie f(0,5) von 0,5 bis 1:

Also gilt $f(0) \cdot a = f(0{,}5)$ (1)
und $f(0{,}5) \cdot a = f(1)$. (2)

Setzt man f(0,5) aus (1) in (2) ein, erhält man:

$f(0) \cdot a \cdot a = f(1)$ also
$f(0) \cdot a^2 = f(1)$. (3)

Wegen $f(1) = f(0) \cdot 1{,}06$ erhalten wir aus (3):

$$f(0) \cdot a^2 = f(0) \cdot 1{,}06$$

und folglich $a = \sqrt{1{,}06}$.

Wegen $\sqrt{1{,}06} = 1{,}06^{0{,}5}$, haben wir unser Problem gelöst:

(1) : $f(0) \cdot a = f(0{,}5)$!!!

Die Seiten der Gleichung werden vertauscht und a setzt man ein:

$$f(0{,}5) = f(0) \cdot 1{,}06^{0{,}5}$$

Die Gleichung $f(x) = f(0) \cdot 1{,}06^{x}$ gilt also auch für $x = 0{,}5$.

Auch für negative Zahlen, z.B. für $x = -1{,}5$, lässt sich zeigen, dass unter den obigen Voraussetzungen

$$f(-1{,}5) = f(0) \cdot 1{,}06^{-1{,}5}$$

gilt:
In gleichen Abständen von 0,5 müssen sich die Funktionswerte stets mit demselben Wachstumsfaktor b vergrößern. Damit folgt:

$$\begin{aligned} f(-1) &= b \cdot f(-1{,}5) && (1) \\ f(-0{,}5) &= b \cdot f(-1) && (2) \\ f(0) &= b \cdot f(-0{,}5) && (3) \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt $f(-0{,}5) = b^2 \cdot f(-1{,}5)$ (4) .
Aus (1), (2) und (3) folgt $f(0) = b^3 \cdot f(-1{,}5)$ (5) .
Außerdem wissen wir, dass $f(-0{,}5) = 1{,}06 \cdot f(-1{,}5)$ (6) gilt,

da die Funktionswerte jeweils um den Faktor 1,06 wachsen sollten, wenn die Argumente (das sind die x-Werte) um 1 wachsen. Aus (4) und (6) folgt:

$$b^2 = 1{,}06 \text{ bzw. } b = 1{,}06^{0{,}5} .$$

Setzt man diesen Wert in (5) ein, erhält man:

$$f(0) = (1{,}06^{0{,}5})^3 \cdot f(-1{,}5) \text{ bzw. } f(0) = 1{,}06^{1{,}5} \cdot f(-1{,}5)$$

Aus der letzten Gleichung folgt $f(-1{,}5) = \dfrac{f(0)}{1{,}06^{1{,}5}}$, woraus sich das gewünschte

Endergebnis $$f(-1{,}5) = f(0) \cdot 1{,}06^{-1{,}5}$$ ergibt.

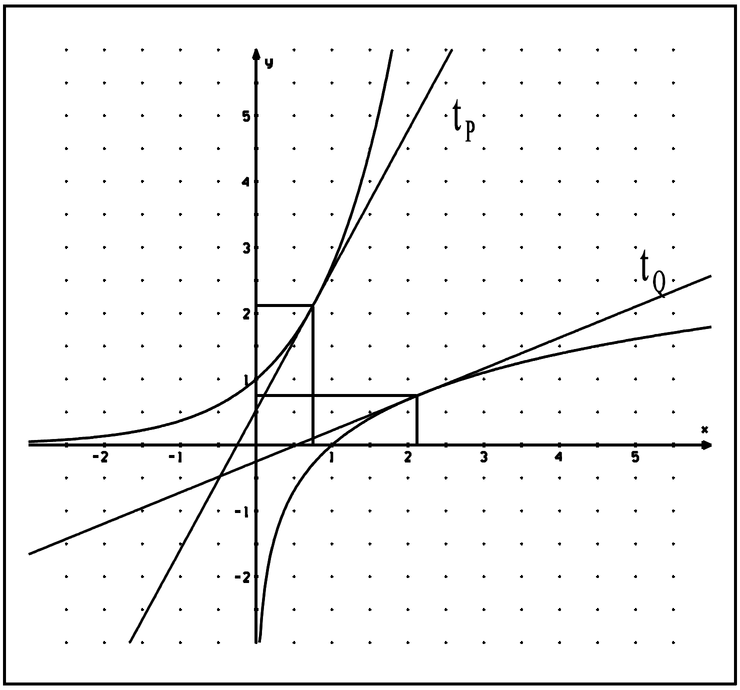
Entsprechend kann man für alle rationalen Zahlen q (das sind Zahlen, die sich als Brüche von ganzen Zahlen schreiben lassen) zeigen, dass unter den oben gemachten Voraussetzungen stets

$$f(q) = f(0) \cdot 1{,}06^{q}$$

gilt.

Wir machen uns nun nicht die Mühe nachzuweisen, dass diese Gleichung auch für irrationale Zahlen gilt. Dass sie für andere Wachstums- bzw. Abnahmefaktoren gilt, brauchen wir ohnehin nicht zu zeigen, da wir im Beweis oben an keiner Stelle auf den speziellen Wert 1,06 eingegangen sind: Die Rechnung ließe sich identisch durchführen, wenn man für 1,06 eine andere Zahl einsetzt.

Die Ableitung der Funktion **ln** (2.Weg)



Die Funktion **ln** ist die Umkehrfunktion der Funktion **exp** !! $(\exp(x) = e^x)$.

An der Stelle $x = 0{,}75$ wurde die Tangente t_P an den zu " e^x " gehörenden Graphen gezeichnet. Die Tangente t_P geht durch den Punkt $P(0{,}75/e^{0{,}75})$. Damit muss $Q(e^{0{,}75}/0{,}75)$ ein Punkt des Graphen der Umkehrfunktion von exp sein. In diesem Punkt Q wurde die Tangente t_Q eingezeichnet.
Die Steigung von t_P ist gleich $\exp'(0{,}75) \approx 2{,}117$.

Gesucht ist die Steigung von t_Q .

Da sich die Punkte des Graphen von ln durch Vertauschung der x- und y-Koordinaten aus den Punkten des Graphen von exp ergeben, ergeben sich auch die Punkte der Tangenten t_Q aus den Punkten des Graphen von t_P durch Vertauschung der Koordinaten: Liegt also der Punkt (a/b) auf t_P , so liegt (b/a) auf t_Q .

Aufgabe 81: Begründe, dass t_Q die Steigung $\dfrac{1}{\exp'(0{,}75)}$ hat.

An der Stelle $e^{0{,}75}$ ist die Steigung des Graphen von ln gleich dem Kehrwert der Steigung, die der Graph von exp an der Stelle 0,75 hat.

Nun gilt aber exp´(x) = exp(x) für jedes x. Also gilt speziell exp´(0,75) = exp(0,75). Damit lässt sich das soeben erhaltene Ergebnis auch folgendermaßen formulieren:

An der Stelle $e^{0,75}$ ist die Steigung des Graphen von ln gleich dem Kehrwert der Steigung, die der Graph von exp an der Stelle 0,75 hat:

$$\ln'(e^{0,75}) = \frac{1}{e^{0,75}}$$

Die Stelle x = 0,75 ist willkürlich für dieses konkrete Beispiel gewählt worden. Man hätte auch die Stelle x = 2 oder die Stelle x = a , … wählen können. In allen Fällen hätten wir das Ergebnis

$$\boxed{\ln'(e^{a}) = \frac{1}{e^{a}}}$$

erhalten.
Wählt man sich nun eine **beliebige positive** Zahl **z**, so gibt es für dieses z eine reelle Zahl a mit der Eigenschaft: $z = e^{a}$ [20]

Es folgt dann [21] unmittelbar $\ln'(z) = \frac{1}{z}$. Natürlich kann man statt z auch einfach x wählen:

$$\boxed{\mathbf{\ln'(x) = \frac{1}{x}}}$$

Diese Gleichung gilt für jedes **positive** x !

Der letzte Hinweis ist fast eine Selbstverständlichkeit, da die Funktion **ln** (wie wir hoffentlich alle wissen) nur für positive x definiert ist: **ln** ist die Umkehrfunktion von **exp** und da **exp** nur positive Funktionswerte (“y-Werte”) hat, kann **ln** nur für positive x-Werte definiert sein und es ist auch nur an diesen **positiven** Stellen sinnvoll, eine Ableitung (Steigung) des logarithmus naturalis zu ermitteln.

♥liche Bitte:

Nicht vergessen, dass ln(0) **nicht definiert** ist.
Ell enn von minus drei kenne ich auch nicht.

[20] Man veranschauliche sich diesen Sachverhalt noch einmal am Graphen von exp.

[21] Siehe Formel, die gerade eingerahmt wurde.

Ableitung von Umkehrfunktionen

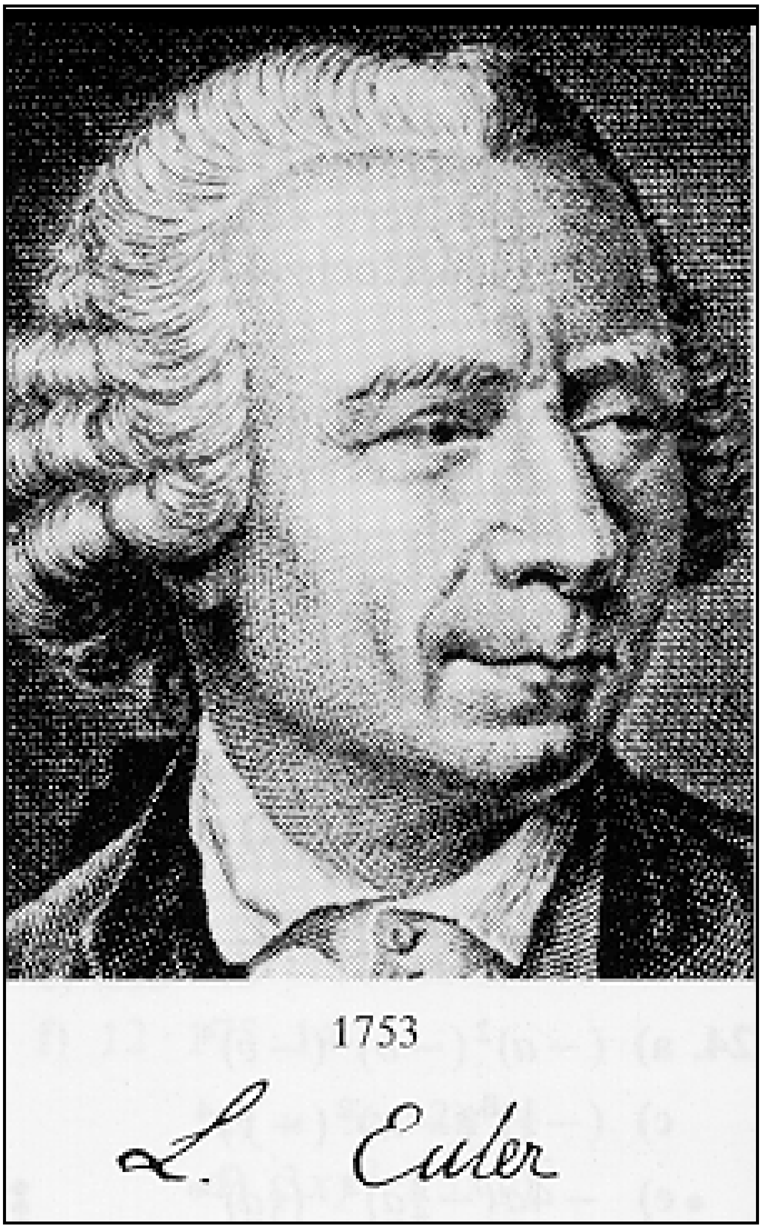
Lesen wir uns den letzten Satz auf Seite A3 unten noch einmal genau durch:

An der Stelle $e^{0,75}$ ist die Steigung des Graphen von ln gleich dem Kehrwert der Steigung, die der Graph von exp an der Stelle 0,75 hat.

Dieser Zusammenhang gilt nun für jede Funktion **f** und ihre Umkehrfunktion $\mathbf{f^{-1}}$:

Die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} an einer Stelle f(x) ist gleich dem Kehrwert der Ableitung von f an der Stelle x. $$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Hinweis: **Die Bezeichnung f^{-1} ist die offizielle Bezeichnung für die Umkehrfunktion von f. Man darf dies nicht mit "1 durch f" verwechseln!**



Empfehlenswerte Literatur:

Leonhard Euler **(Rüdiger Thiele; Biographien hervorragender Naturwissenschaftler… Band 56, Teubner, Leipzig 1982)**

Leonhard Euler (Emil Fellmann; Monographie rororo)

Leonhard Euler (R. Fueter; Birkhäuser)

Wussing/Arnold: Biographien bedeutender Mathematiker (Volk und Wissen 1983; VeV) und

Bell: Die großen Mathematiker (Econ-Verlag; wohl immer noch vergriffen)

Nach den Sommerferien 2003 beginnt der Kurs ma-3, der als Themenschwerpunkt die Analytische Geometrie (Vektorrechnung,…) hat. Auf den folgenden Seiten soll deshalb an die wesentlichen Inhalte erinnert werden, denen man in der Einführungsphase begegnet ist. Man möge berücksichtigen, dass der Kurs ma-3 **nicht** mit einer Generalwiederholung dieses Stoffes beginnen kann. Dafür ist die Zeit im Wintersemester -vor dem Abitur!!!- viel zu kurz.

Grundlagen aus der Vektorrechnung für den Kurs ma-3

1. Jeder Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ definiert eine Verschiebung der Punkte des dreidimensionalen Raums.

   Beispielsweise “bewirkt” der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dass alle Punkte des Raums drei Einheiten in Richtung der x-Achse, zwei Einheiten in Richtung der negativen y-Achse und eine Einheit in Richtung der z-Achse verschoben werden.

   Der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ verschiebt den Punkt (0/0/0) - also den Ursprung - in den Punkt (2/5/-1). Der Punkt (-4/1/3) wird durch diesen Vektor in den Punkt (-2/6/2) verschoben.

2. Jeder Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ definiert auch einen Punkt des dreidimensionalen Raums. Es ist dies der Punkt (x_1 , x_2 , x_3). (Jeder Vektor definiert also den Punkt, der durch Verschiebung des Ursprungs entsteht.) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der **Ortsvektor** des Punktes (3/-2/1).

3. Addiert man zwei Vektoren “komponentenweise”, so definiert die Summe des Ergebnisses diejenige Verschiebung, die dadurch entsteht, dass man beide Verschiebungen (die durch die beiden gegebenen Vektoren definiert sind) hintereinander (= nacheinander) ausführt.

   Die Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ definieren zwei Verschiebungen. Die Summe dieser beiden Vektoren (also $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$) ist der Vektor $\begin{pmatrix} 3+2 \\ -2+5 \\ 1+(-1) \end{pmatrix}$ $\left(= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

4. Sind zwei Punkte A und B durch ihre sogenannten Ortsvektoren (OVen) $\vec{a}$, $\vec{b}$ festgelegt, so definiert der Vektor $\vec{a} - \vec{b}$ diejenige Verschiebung, die den Punkt B in den Punkt A verschiebt. $\vec{a} - \vec{b}$ kann auch als RV (Richtungsvektor) aufgefasst werden. (Diesen Sachverhalt sollte man sich unbedingt einmal in einer Skizze veranschaulichen!!!)

5. Durch g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ($r \in \mathbb{R}$) wird eine Gerade im Raum definiert. Setzt man für r irgendeine reelle Zahl (z.B. 3) ein, erhält man einen Punkt der Geraden (in diesem Fall den Punkt (9/13/-2)). Für r=0 erhält man den Punkt (3/-2/1).

   Der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ legt die Richtung der Geraden im Raum fest. Man nennt diesen Vektor daher auch **RV der Geraden**. Jedes Vielfache dieses Vektors (außer das Nullfache!) ist auch ein RV von g.

   Es sind also auch $\begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$, … RVen von g.
   Vektoren, die Vielfache voneinander sind, heißen **kollinear**.

   $\begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind also kollineare Vektoren.

6. Hat eine Komponente eines Vektors den Wert Null, so liegt der durch diesen Vektor definierte Punkt in einer der drei Koordinatenebenen:

   Der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ definiert den Punkt (5/3/0) in der x,y- Ebene.

   Der Punkt (5/0/3) liegt in der x,z-Ebene, weil die y-Koordinate dieses Punktes den Wert Null hat.

7. Zwei Geraden, die kollinare RVen haben, sind parallel.

8. Zwei Geraden, die nicht parallel zueinander sind und sich nicht schneiden, heißen **windschief**.

9. Schneiden sich zwei Geraden senkrecht, sagt man, dass diese Geraden **orthogonale** Richtungsvekoren haben. (Klären Sie die Herkunft des Wortes **orthogonal**! (orthodox, Diagonale, …)

Können Sie folgende Aufgaben lösen?

1. Gib einen RV für die Gerade g an, die durch die Punkte A(- 2/3/1) und B(2/- 4/5) verläuft.

2. Gib eine Geradengleichung für die Gerade h an, die parallel zu g (siehe 1.) ist und durch den Punkt Q(3/- 5/2) geht.

3. In welchem Punkt schneidet die Gerade g (siehe 1.) die y-z-Ebene?

4. Durch $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ $(r \in \mathbb{R})$ wird eine Gerade definiert. Begründe, ohne "große Rechnungen durchzuführen", dass der Punkt (6/- 11/ 9) ein Punkt dieser Geraden ist.
   Warum liegt der Punkt (2/- 4/6) offensichtlich nicht auf k?

5. Gib eine Geradengleichung für eine Gerade an, die durch den Punkt (1/2/3) geht und parallel zur y-Achse ist. In welchem Punkt schneidet diese Gerade eine der Koordinatenebenen?

6. Welche Entfernung hat der Punkt (- 4/ 4/ 7) vom Ursprung?

7. Welchen Betrag hat der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$?

8. Welche Entfernung haben die Punkte (3/- 1/- 6) und (1/- 3/- 5) voneinander?

9. Überprüfe, ob sich k (siehe 4.) und die durch $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(r \in \mathbb{R})$ definierte Gerade schneiden. Gib ggf. den Schnittpunkt an.

10. Auf den folgenden Seiten findet man einige Hinweise zur Textgestaltung im Kurs ma-3. Ihre Lehrkraft ist auch in Besitz dieser Blätter. Diese Seiten sind insbesondere für Menschen wesentlich, die Mathematik als Prüfungsfach wählen, weil spätestens im Abitur kein einziges Auge mehr zugedrückt werden kann. (Dafür sorgt i. Allg. schon der Zweitkorrektor!!!)

Inhaltsverzeichnis